Chap 4 – La fonction exponentielle

I. Définition et propriétés de base :

1. Equation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$:

Introduction : voir le TD *La fonction exponentielle, ou les propriétés d'une fonction égale à sa dérivée*, qui fait partie du cours.
On cherche toutes les fonctions qui soient égales à leur dérivée et qui envoient 0 en 1. Une seule fonction convient, on la nommera exponentielle.

Théorème 1 : *existence (admis) et unicité (démontré en TD) d'une solution*
Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, et notée **exp** : $f(x) = \exp(x)$.

2. Propriétés de la fonction exponentielle :

- Par définition : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exp' = ...
- Par définition : exp(0) = ...
- exp(1) est noté ...... (≈ ....), c'est un nombre irrationnel (comme π).
- Démontré en TD : exp ne s'annule jamais. Donc puisqu'elle est continue (car dérivable) et que exp(0) = 1 > 0, alors elle est strictement positive : **pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.**

Propriété 2: pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$. (vrai pour les entiers positifs **et** négatifs)

Démonstration (à connaitre)
Exemple 1 : écrire exp(3) et exp(-6) en fonction de e.

3. Notation e^x

Définition 1: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$. On généralise cette notation vraie sur $\mathbb{Z}$ en posant : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$. On utilisera dorénavant cette notation.

Propriété 3: *les propriétés de la fonction exponentielle s'énoncent ainsi plus facilement :*

$$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y} \qquad \boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}} \qquad \boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}} \qquad \boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$$

Exemple 2 : Simplifier les expressions $(e^{2x})^2 \times e^{-x}$, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ et $\frac{(e^{6x-3})^2 \times e^{4x}}{e^{1-x}}$.

Théorème 4: *Relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle*
La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur IR, non nulle, qui vérifie
$$f(x + y) = f(x) \times f(y) \text{ et } f'(0) = 1.$$

Démonstration :

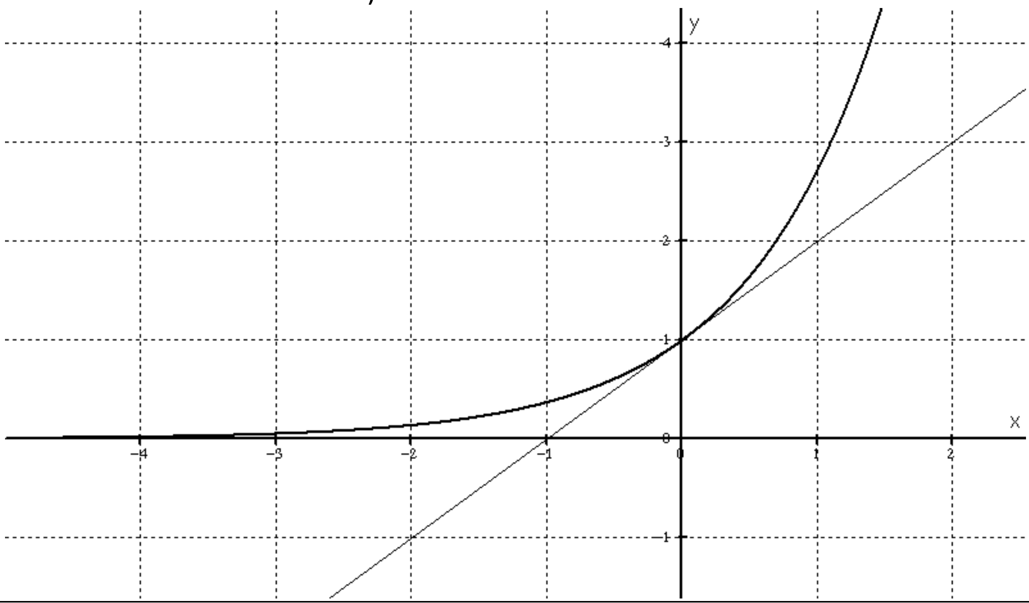
-

II. Etude de la fonction exponentielle:

1. Sens de variation et limites :

Propriété 5:

- sens de variation : la fonction exponentielle est ……………………………………sur $\mathbb{R}$.
- limites $\lim_{x \to +\infty} e^x =$ ………. et $\lim_{x \to -\infty} e^x =$ ……….
- Représentation graphique avec la tangente en 0 d'équation $y = x + 1$: (l'approximation affine de exp au voisinage de 0 est donc $e^x \approx$ ………………)



Démonstrations (à connaitre)

Conséquences :

- Pour tout m strictement positif, l'équation $e^x = m$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(d'après le ……………………………………………………………………………………….)

- **Résolution d'équations/inéquations avec exp** : on utilise $\boxed{e^x = e^y \Leftrightarrow x = y}$ et $\boxed{e^x > e^y \Leftrightarrow x > y}$

Exemple 3: Résoudre l'inéquation $e^{x+1} \leq e^{2x}$.

Propriété 6 : $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \exp'(0) =$ ……. (taux de variation de exp en en 0).

Propriété 7 : *indéterminée levées par croissance comparée* : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Démonstration (à connaitre):

Conséquence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Exemple 4 : Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{1000}}$ et $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x}$.

2. Fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$:

Propriété 8 : Soit u une fonction dérivable sur une intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemple 5: dériver $f: x \mapsto e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$ et $g: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.