Révision Bac 2020
Theme :intégrale

Excercice1

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$.

1. a. Soit g la fonction définie sur P par $g(x) = xe^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur P par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur P de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

d. Calculer I_3 et I_5.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note L sa limite.

Excercice2

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$ et

$$J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1. Sont représentées ci-dessus les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeurs de n.

a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n > 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] :.

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont conve $0 \le \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \le \frac{e^{-nx}}{1+x}$ rgentes et déterminer leur limite.

3. a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n > 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$$

b. En déduire $\lim nI_n$.

Exercice 3

1/ Montrer en intégrant par partie que $\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = -\frac{1}{2}$

2/ On donne $A = \int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\,dx$ et $B = \int_0^{\pi/2} x\sin^2(x)\,dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$ (Indication $\cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos(2a)$)

b) Déduire les valeurs de A et B

3/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\cos(x)$

On donne $C = \left\{ M(x, y) \text{ tel que } y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de C autour de l'axe des abscisses

Exercice N°4

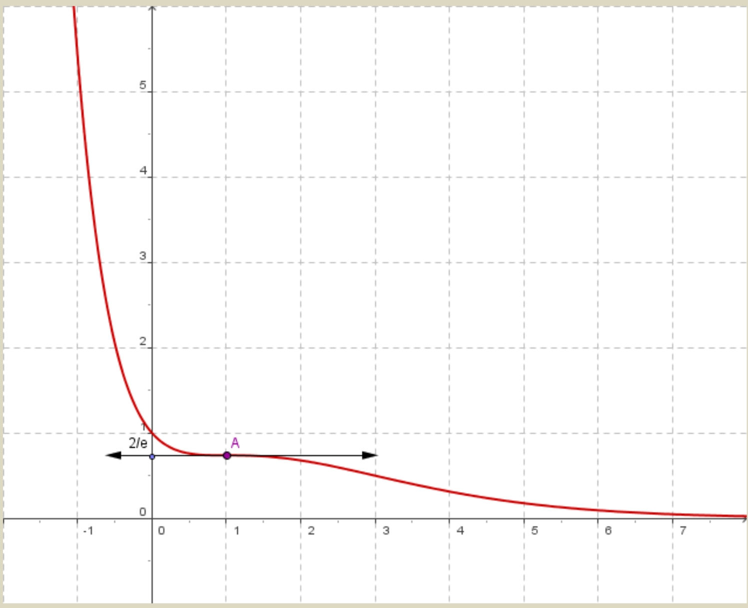
On considère une fonction f définie sur IR.

A) La courbe (C) ci-dessous est celle de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

* La courbe (C) de f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

* La tangente à la courbe (C) au point $A\left(1, \frac{2}{e}\right)$ est parallèle à $(O, \vec{i})$.

* La droite $(O, \vec{i})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



En utilisant le graphe :

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Préciser le sens de variation de f.

3/ Déterminer f(1) et f '(1).

4/ Que représente le point A pour (C).

B) La courbe (C) est en fait celle de la fonction définie sur IR par $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective x = 0 et x = n.

1/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I_n = \int_0^n xe^{-x}\,dx$.

2/ Vérifier que pour tout x de IR on a : $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.

3/ a) En déduire que $A_n = 2I_n - f(n) + 1$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice5 :

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0
2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.
3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Excercice6

:On considère la fonction f définie sur] – 1 , 1 [par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Etudier la variation de f et représenter sa courbe(C) dans un repère orthonormé.
2. Soit $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour x de] – 1 , 1 [, $u(x) = \sin x$ pour x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)dt$

   a- Montrer que F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer F' (x)

   b- Montrer que pour x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; F (x) = x . c) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

3. Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation

   $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Montrer que A= $F(\frac{\pi}{4}) - F(-\frac{\pi}{4})$. Déduire A .

4. Soit C = { M (x , y) tel que y= $\sqrt{-t}\ f(t)$, $-\frac{1}{2} \le t \le 0$ } et S le solide obtenue par

   rotation de (C) autour de l'axe (o x) . Calculer V(S)

Excercice7

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Etudier f et construire sa courbe représentative ζ dans un au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)dt$.

   a) Montrer que F est impaire.

   b) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'(x) pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe ζ, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et $x=\dfrac{1}{2}$.

4) Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Excercice8

Soit la suite (I_n) définie par $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+x)^n e^{2x}\,dx$ pour tout n de N*.

1) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2) a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout n ∈ N*

b) Montrer que I_n est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) Vérifier que pour x ∈ [- 1 , 0] on a : $e^{-2}\leq e^{2x}\leq 1$; Montrer alors que pour tout n de N* on a : $\dfrac{e^{-2}}{n+1}\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$ et déduire la limite de I_n.

4) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $2I_{n+1}+(n+1).I_n=1$.

5) En déduire la valeur de I_2 puis celle de $J=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+2x)e^{2x}dx$.

Excercice9

4) Soit $I=\displaystyle\int_1^{e}\frac{(\ln x)^3}{x}$ alors I est égale a : a)3 b) $-\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{4}$

Soit la suite définie sur IN par $U_n=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

1. Montrer que $U_1=\ln\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$. 2. Vérifier que $\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ puis calculer U_0

3. Montrer que la suite U est décroissante et positive .

4. a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $U_n+U_{n+1}=\dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

   b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $\dfrac{1-e^{-n}}{2n}\leq U_n\leq\dfrac{1-e^{-n}}{n}$. c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}U_n$.

5. On pose pour tout $n\in IN^*$: $V_n=\displaystyle\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}V_k$

a) Calculer V_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \to +\infty} V_n$. b) Calculer S_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Excercice10

Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ $\quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

1)

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer la dérivée f' de f.
b) En déduire la valeur de I.

2)

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que J + 2I = K.
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K,
Montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et K.

Excercice11

1. Soit f une fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Etudier les variations de f et déduire que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur IR .

2. Soit g une fonction définie sur $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

Montrer que g est dérivable sur IR et calculer g ' (x) .

3. Soit $h(x) = \int_0^{tgx} \frac{1}{1+t^2} dt$

Montrer que h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer h' (x) .

4. Expliciter h (x)
5. En déduire que g = f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$

Excercice12

Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = $\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1) Justifier que f est dérivable sur IR et s'annule une seule fois sur IR.

2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse – 1.

Excercice13

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur 3 par : $f(x) = \ln(4 + e^{-x})$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{0}^{\ln 2}$ **Error!** dx

Excercice14

Soient f et g les fonctions définies sur R^{+*}. par :

$f(x) =$ **Error!** $- \ln x$ et $g(x) = x \ln x - x$.

1. Calculer $g'(x)$. En déduire les primitives de f sur R^{+*}.

2. Calculer $\int_{1}^{e} f(x)dx$.

Excercice15

Partie A: Soit l'équation différentielle $(E): y' + y = e^{-x}$

1) Montrer que la fonction $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' + y = 0$
3) Montrer qu'une solution v dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4) En déduire toutes les solutions de (E).
5) Déterminer la fonction f_2 solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B : Soit k un réel donné et soit $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ et ζ_k sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f_k en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Dresser le tableau de variation de f_k.

Partie C : On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}dx$ et pour tout $n \geq 1$ $I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}dx$.

1) a) Calculer I_0.

b) Montrer que $I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$.

c) En déduire I_1 et I_2.

2) Le graphique ci-dessous représente une courbe ζ_k qui représente une fonction f_k.