B .H. Mourad	*Equations différentielles*	*Niveau : 4ère SC*

Equations différentielles du type $y' = ay$

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Equations différentielles du type $y' = ay + b$

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

De plus pour tous réels x_0, y_0, la fonction $f : x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ est l' unique solution de $y' = ay + b$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Equations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Soit ω un réel non nul.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Soit ω un réel non nul et x_0, y_0 deux réels.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0\cos(\omega x)$.

Exercice n :1

1/ Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$

2/ Soit la fonction f *définie par* $f(x) = 2.x.e^{2x} + 1$

a- Vérifier que f *est une solution de l'équation différentielle* $(E) : y' - 2y = 2.e^{2x} - 2$

b- Déduire l'ensemble de solutions de (E)

3/ Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' = 0$

Exercice n :2

1)a- Résoudre l'équation différentielle $y'+y=0$

b- On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=2x.e^{-x}$

i) Vérifier que la fonction $f(x)=x^2.e^{-x}$ *est une solution de (E)*

ii) Déduire la solution de (E) qui s'annule en $\sqrt{3}$

Exercice n :3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$.

1/ Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ soit une solution de (E).

2/ Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'=2y$.

3/ Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-f_0)$ est solution de (E_0).

4/ Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice n :4

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y''+4y=0$,telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Exercice n :5

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.

On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en secondes et $x(t)$ en mètres).

On suppose de plus qu' à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ avec un coefficient égal à $-\frac{\pi^2}{4}$.

1. Donner l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1)=2$ et $x(2)=0$.
2. déterminer la position et la vitesse du mobile à l'instant $t=0$.
3. Représenter $t \mapsto x(t)$.