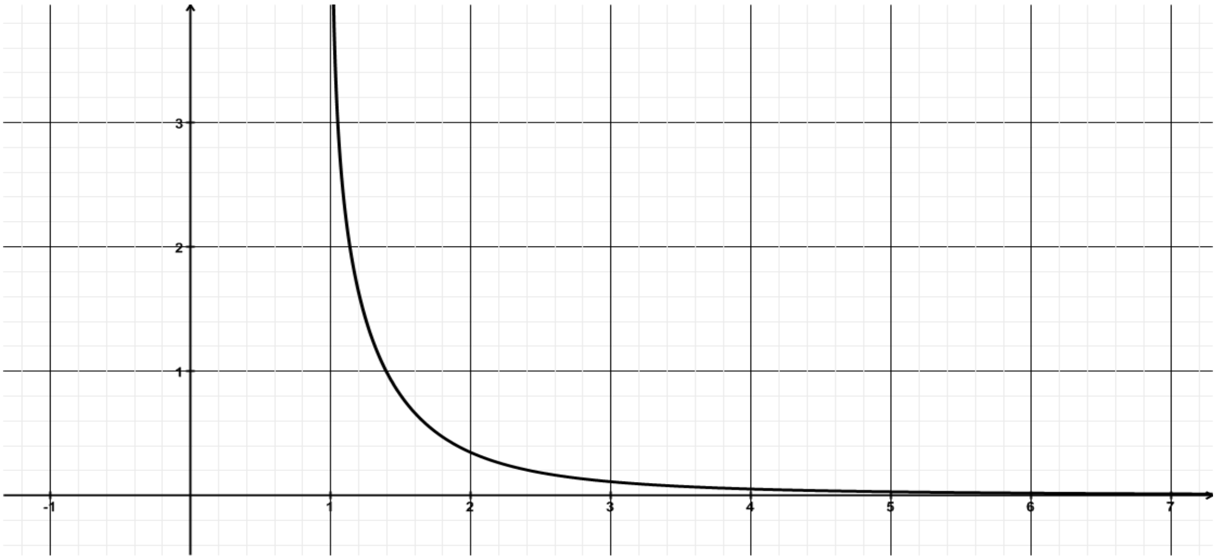
Exercice n°1

On donne ci dessous, la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ pa

$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}+1\right)$ où les droites d'équations x = 1 et y = 0 sont des asymptotes.



1) a- Montrer en utilisant le graphe que g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- On note f la fonction réciproque de g ($f(x)=g^{-1}(x)$). Expliciter f(x)

c- Tracer dans le même repère la courbe représentative ζ de f.

d- Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$; $(f(x)-1)^2=\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$

e- Soit S la surface du plan limitée par la courbe ζ et les droites d'équations :

y = 1 ; x = ln2 et x = ln3. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la surfece S autour de l'axe des abscisses.

2) Soit h la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)$.

a- Montrer que h est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,+\infty[$.

b- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(h^{-1})'(x)=f(x)-1$.

3) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$.

a- Montrer que $u_1 = \frac{\pi}{12}$ et intérpréter géométriquement le résultat.

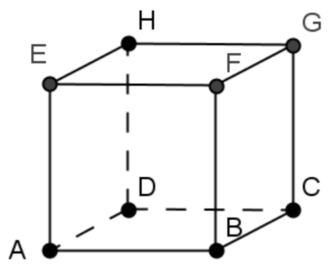
b- Prouver que pour tout $n \in IN^*$, $u_n > 0$.

c- Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

d- Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n - 1}}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

<u>Exercice n°2</u>

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que AB = 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a- Vérifier que : $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AG}$.

b- Donner une équation cartésienne du plan P = (EBD).

2) On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{2} = 0$.

a- Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

b- Vérifier que $\Omega \in (AG)$.

c- Montrer que $S \cap P$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre .

3) Soit S' la sphère de centre $J(1,-1,-2)$ et de rayon $R' = \sqrt{\frac{15}{2}}$.

a- Déterminer une équation développé de S'.

b- Montrer que $S \cap S'$ est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon.