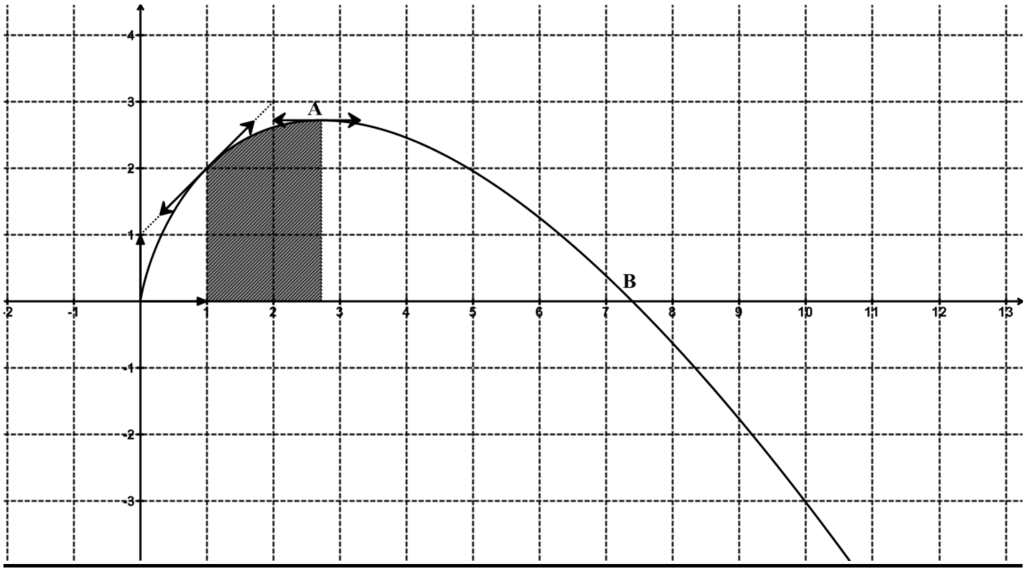
Exercice n°1

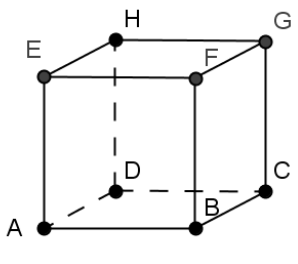
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe ζ suivante d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \alpha.x + \beta.x\ln(x) & \text{xi } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ où α et β sont des constantes réelles.



1) a- Par lecture graphique ; Déterminer f(1) et $f'(1)$.
   b- En déduire les valeurs des réels α et β.
   c- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2) Au point A, la courbe ζ admet une tangente horizontale.
   a- Vérifier que le point A, a pour coordonnées (e,e).
   b- Dresser alors à partir du graphe le tableau des variations de la fonction f.
3) La courbe ζ coupe l'axe des abscisses au point B.
   a- Déterminer les coordonnées du point B.
   b- En déduire le signe de f(x) sur $[0,+\infty[$.
4) a- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e x.\ln(x)\,dx$.
   b- En déduire l'aire (en u.a) de la partie hachurée du plan.

Exercice n°2

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que AB = 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a- Vérifier que : $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AG}$.

b- Donner une équation cartésienne du plan P = (EBD).

2) On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) de

l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-x-y-z+\frac{1}{2}=0$.

a- Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

b- Vérifier que $\Omega \in (AG)$.

c- Montrer que $S \cap P$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre .

3) Soit S' la sphère de centre $J(1,-1,-2)$ et de rayon $R'=\sqrt{\frac{15}{2}}$.

a- Déterminer une équation développé de S'.

b- Montrer que $S \cap S'$ est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $\frac{z}{\bar{z}} \in IR$.
2) Soit z un nombre complexe tel que $\text{Im}(z) \neq 0$.

   On considère les points M, N et P d'affixes respectifs z , $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$.

   a- Vérifier que M et N sont distincts et que $\frac{z_P - z_M}{z_N - z_M} = \frac{-z}{\bar{z}}$. En déduire que $MP = MN$.

   b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que M, N et P soient alignés.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-2iz-1+e^{2i\theta}=0$ où $\theta \in]0,2\pi[$.
4) On pose $z=i(1-e^{i\theta})$.

   a- Vérifier que pour tout $\theta \in]0,2\pi[$ on a $\text{Im}(z) \neq 0$.

   b- Ecrire z sous forme exponentielle.

   c- Déterminer θ pour que MNP soit un triangle équilatéral direct.