Hichem.Benaich@edunet.tn
Proposée par Benaich Hichem

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres

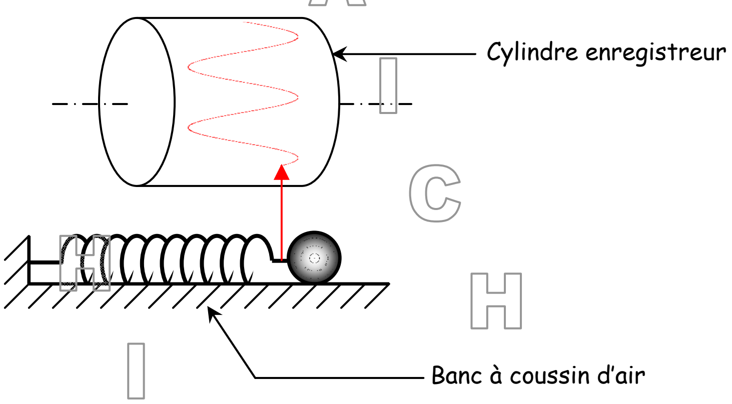
RAPPEL DU COURS

A / Oscillations libres non amorties :

I / Définition :

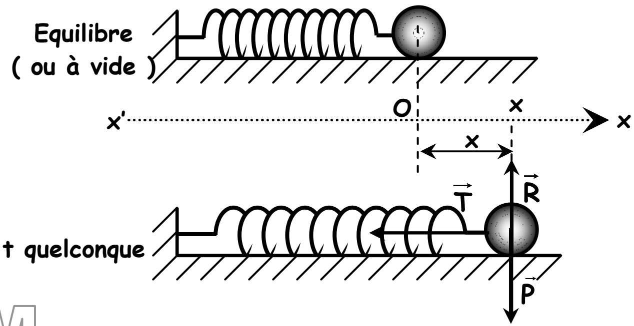
Soit un système constitué par un solide (S) de masse m attaché à un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k . Ce système constitue un pendule élastique.
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance a, puis on l'abandonne avec ou sans vitesse ; il effectue alors des oscillations rectilignes. Les forces de frottement sont supposées négligeables, les oscillations sont **non amorties** : L'oscillateur est alors dit **harmonique** .

II / Etude expérimentale :



III / Etude théorique :

1°) Equation différentielle :



Système = { S }

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$

R.F.D. : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur (x'x) : $-\|\vec{T}\| = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow -kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x \quad (*)$

Posons $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(*) devient $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$

C'est une équation différentielle qui admet comme solution $x(t) = x_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

Donc, (S) est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

et de fréquence propre $N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

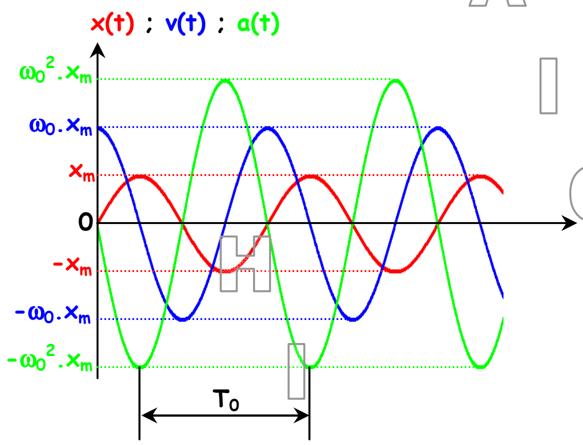
2°) Elongation , vitesse et accélération :

$x(t) = x_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \omega_0 .x_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_x + \dfrac{\pi}{2}) = V_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_V)$ avec $V_m = \omega_0 .x_m$ et $\varphi_V = \varphi_x + \dfrac{\pi}{2}$

$a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega_0^2 .x_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_x + \pi) = a_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_a)$ avec $a_m = \omega_0^2 .x_m$ et $\varphi_a = \varphi_x + \pi$

Donc , x(t) , v(t) et a(t) sont des fonctions sinusoïdales du temps de même période T_0 .
a(t) est en quadrature avance de phase par rapport à v(t) qui est elle-même en quadrature avance de phase par rapport à x(t) .
a(t) et x(t) sont en opposition de phase .



Cas où $\varphi_x = 0$

3°) Energie mécanique d'un oscillateur mécanique :

a) Energie potentielle élastique $E_{Pe}(t)$:

Rappel : $\boxed{E_{pe} = \dfrac{1}{2}k.déf^2}$ Avec déf. : déformation du ressort par rapport au ressort à vide .

$E_{Pe}(t) = \dfrac{1}{2}k.x^2 = \dfrac{1}{2}.k.x_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \dfrac{1}{4}k.x_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

Donc , $E_{Pe}(t)$ est une fonction périodique du temps de période $T = \dfrac{T_0}{2}$.

b) Energie cinétique $E_C(t)$:

Rappel : $\boxed{E_C = \dfrac{1}{2}m.v^2}$

$E_C(t) = \dfrac{1}{2}m.v^2 = \dfrac{1}{2}m.\omega_0^2.x_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

$= \dfrac{1}{2}k.x_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \dfrac{1}{4}k.x_m^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

Donc , $E_C(t)$ est aussi une fonction périodique du temps de période $T = \dfrac{T_0}{2}$.

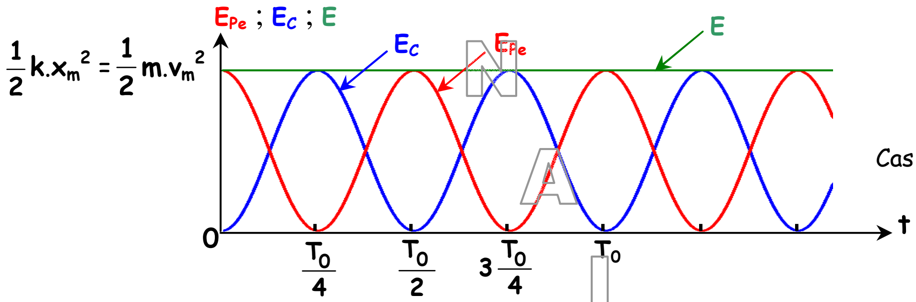
SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

c) Energie mécanique et sa conservation :

Rappel : $\boxed{E = E_{Pe} + E_C = \frac{1}{2}k.x^2 + \frac{1}{2}m.v^2}$

$$E = E_{Pe}(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}k.x_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{2}k.x_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$$

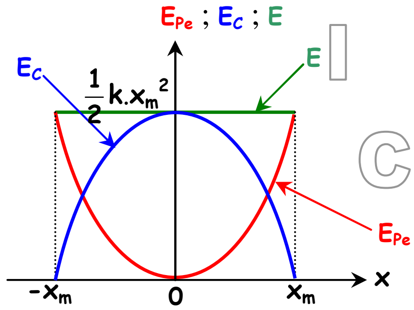
$$= \frac{1}{2}k.x_m^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)] = \frac{1}{2}.k.x_m^2 = \frac{1}{2}m.v_m^2$$



Cas où $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad

Donc , l'énergie mécanique d'un oscillateur mécanique est **constante** au cours du temps .
On dit que l'oscillateur mécanique en régime libre est un système **conservatif** .

4°) Diagrammes des énergies :



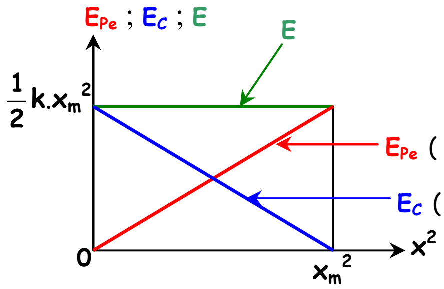
$\boxed{E_{Pe} = \frac{1}{2}k.x^2}$

$E = \frac{1}{2}k.x^2 + \frac{1}{2}m.v^2$

Pour $x = x_m$, $v = 0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}k.x_m^2}$

$E = E_{Pe} + E_C \Rightarrow E_C = E - E_{Pe}$

$\Rightarrow \boxed{E_C = -\frac{1}{2}k.x^2 + \frac{1}{2}k.x_m^2}$



E_{Pe} (droite de pente $\frac{1}{2}k > 0$)

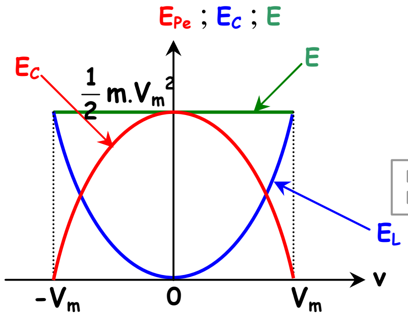
E_C (droite de pente $-\frac{1}{2}k < 0$)

Hichem.Benaich@edunet.tn

Proposée par Benaich Hichem

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres



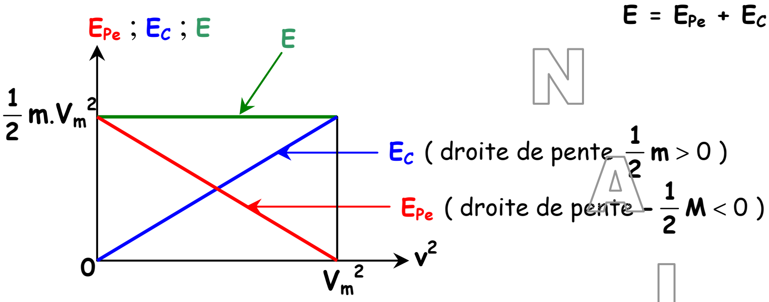
$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}m.v^2}$$

$$E = \frac{1}{2}k.x^2 + \frac{1}{2}m.v^2$$

Pour $v = V_m$, $x = 0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}m.V_m^2}$

$$E = E_{Pe} + E_C \Rightarrow E_{Pe} = E - E_C$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{Pe} = -\frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}m.V_m^2}$$



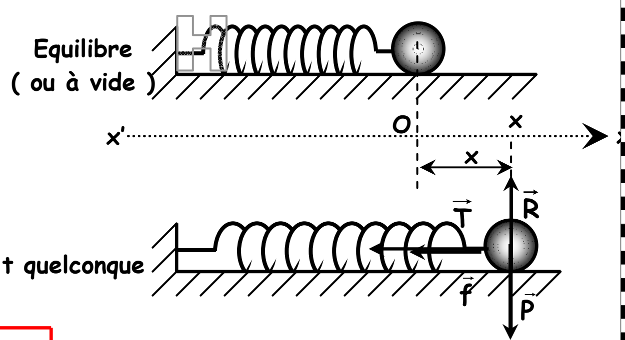
B / Oscillations libres amorties :

I / Définition :

On appelle oscillations amorties les oscillations dont l'amplitude n'est pas constante ; elle diminue au cours du temps .

II / Etude théorique :

1°) Equation différentielle :



Système = { S }

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$ et $\vec{f}$

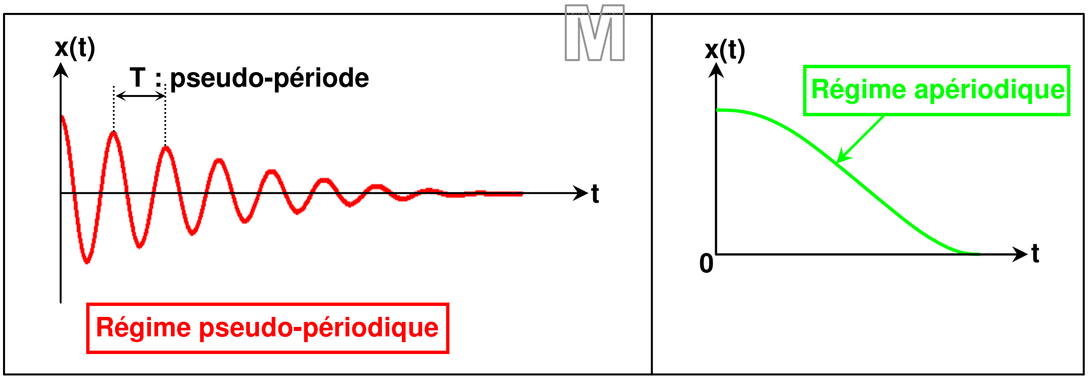
R.F.D. : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur (x'x) : $-\|\vec{T}\| - \|\vec{f}\| = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow -kx - hv = m\frac{d^2x}{dt^2}$ soit $\boxed{kx + h\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0}$

terme dû à l'amortissement

Cette équation différentielle admet comme solution l'une des deux solutions suivantes :



SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres

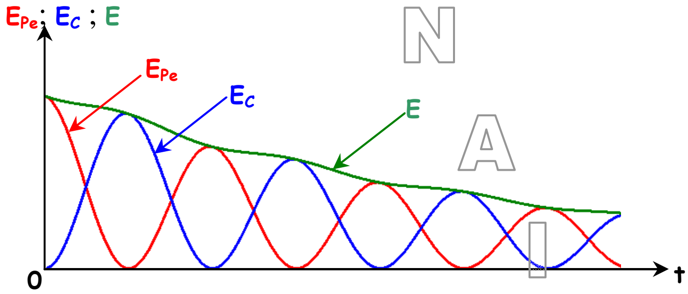
2°) Energie mécanique et sa non conservation :

$$E = E_{Pe} + E_C = \frac{1}{2}k.x^2 + \frac{1}{2}m.v^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 2.\frac{1}{2}k.v + 2.\frac{1}{2}m.v\frac{d^2x}{dt^2} = v.(k.x + m\frac{d^2x}{dt^2}) = -h.v^2 < 0 \Rightarrow$$ E fonction **décroissante** du temps .

Donc , l'énergie mécanique d'un oscillateur mécanique diminue au cours du temps , elle est dissipée sous forme de chaleur . Cette diminution est d'autant plus rapide que la valeur de h est grande . On dit qu'un oscillateur mécanique en régime libre est un système **non conservatif** .

A l'aide d'un logiciel adéquat , on trace les courbes suivantes :



III / Analogie mécanique-électrique :

	OSCILLATEUR MECANIQUE	OSCILLATEUR ELECTRIQUE
Exemple	**Pendule élastique** Système = { ressort , solide (S) }	**Circuit (L , C)** Système = { condensateur , bobine }
Grandeurs caractéristiques de l'oscillateur	**m** : masse du solide (S)	**L** : inductance de la bobine
	k:constante de raideur du ressort	$\frac{1}{C}$; **C** :capacité du condensateur
Grandeurs Oscillantes	**x**:abscisse (ou élongation de G)	**q**:charge électrique du condensateur
	$V = \frac{dx}{dt}$: vitesse de (S)	$i = \frac{dq}{dt}$: intensité du courant
Equation différentielle des oscillations	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$
Pulsation et période propre des oscillations	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$
Equation horaire des oscillations	$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q(t) = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

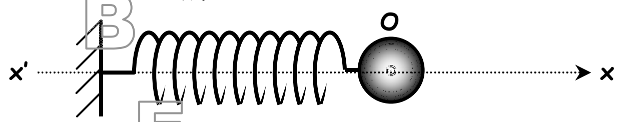
Hichem.Benaich@edunet.tn

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres

EXERCICE 1

Soit un pendule horizontal constitué d'un ressort (R) , enfilé à travers une tige , à l'extrémité duquel est soudé un solide (S) de masse m ponctuel pouvant coulisser sans frottement à travers la tige .
Le ressort ayant une constante de raideur k .

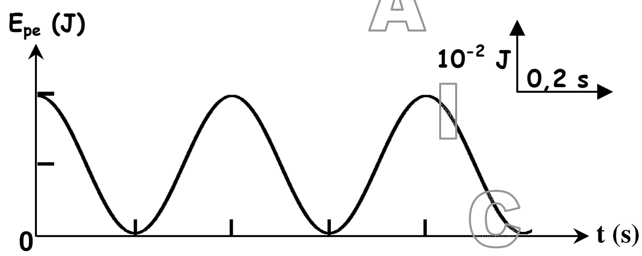


On comprime le ressort de 5 cm et on l'abandonne à lui-même sans vitesse à t = 0 .

1°) Qu'observe-t-on ? Interpréter ces observations énergétiquement .

2°) Exprimer l'énergie mécanique du pendule élastique à chaque instant , en déduire l'équation différentielle caractérisant cet oscillateur , préciser la nature du mouvement du solide (S) et exprimer sa pulsation en fonction de k et m .

3°) On donne les variations de l'énergie potentielle élastique E_{pe} du pendule élastique au cours du temps .



a) Déterminer l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique . Varie-t-elle au cours du temps ? Justifier .
b) En déduire la valeur de la constante k du ressort .
c) Déterminer la période de l'énergie potentielle et en déduire la période des oscillations .
d) Calculer alors la masse m du solide (S) .

4°) Ecrire l'équation horaire du mouvement du solide (S) . En déduire l'équation donnant l'énergie potentielle en fonction du temps $E_{pot}(t)$.

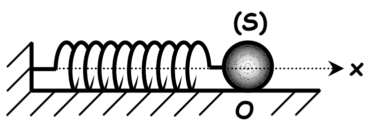
5°) Pour quelles positions , la vitesse du solide (S) est réduite de moitié de sa valeur acquise au passage par sa position d'équilibre ?

Rép. Num.: 1°) Echanges des énergies E_C et Epe ; 2°) $E=\frac{1}{2}m.v^2+\frac{1}{2}k.x^2$; $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$; m.v.t. rect. sinusoïdal ;

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$; 3°) a) $E=E_{pot.max}=2.10^{-2}$J ; b) $E=\frac{1}{2}k.x_m^2 \Rightarrow k=\frac{2.E}{x_m^2}=16N.m^{-1}$; c) T'=0,4s ; T=2T' =0,8s ;

d) m = 0,25kg ; 4°) $x(t)=5.10^{-2}\sin(7{,}85t-\frac{\pi}{2})$(m) ; $E_{pot}(t)=2.10^{-2}\sin^2(7{,}85t-\frac{\pi}{2})$(J) ; 5°) $x_1=\pm0{,}04$m .

EXERCICE 2 (Bac 96 modifié)



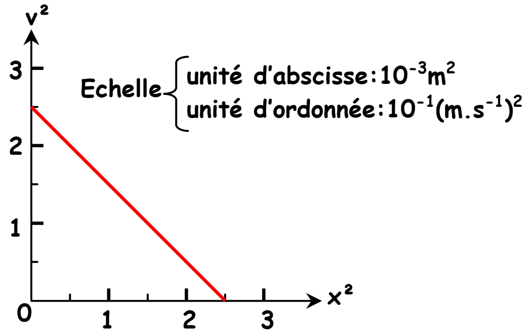
L'extrémité d'un ressort (R) , est liée à un solide ponctuel de masse m , l'autre extrémité étant fixe .
Ce solide peut glisser sans frottement sur un plan horizontal .
Le ressort est à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k .
On allonge le solide (S) de sa position d'équilibre de x_0 à un instant qu'on prend comme origine des dates , puis on l'abandonne sans vitesse .

1°) a) A une date t quelconque , le centre d'inertie G de (S) a une élongation x et sa vitesse instantanée est v .
Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système {solide (S) , ressort, Terre} en fonction de x , v , k et m .

SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

b) Sachant que cette énergie E est constante, exprimer sa valeur en fonction de k et y_0 et déduire que le mouvement de (S) est rectiligne sinusoïdal

2) A l'aide d'un dispositif approprié, on mesure la vitesse instantanée v du solide (S) pour différentes élongations y du centre d'inertie G de (S).
Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe $v^2 = f(x^2)$.



a) Justifier théoriquement l'allure de la courbe en établissant l'expression de v^2.

b) En déduire les valeurs de la pulsation ω_0 et l'amplitude x_0 du mouvement de (S).

c) Etablir l'équation horaire du mouvement.

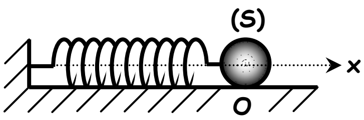
d) Sachant que l'énergie mécanique E du système est égale à 0,125 J, calculer les valeurs de la constante de raideur k du ressort et la masse m du solide (S).

Rép. Num. : **1°) a)** $E=\frac{1}{2}k.x^2+\frac{1}{2}m.v^2$; **b)** $E=\frac{1}{2}k.x_0^2$; E=cste $\Rightarrow \frac{dE}{dt}=0 \rightarrow$ éq. diff. ; **2°) a)** $v^2=-\omega_0^2.x^2+\omega_0^2.x_0^2$;

b) $\omega_0=10rad.s^{-1}$; $x_0=5.10^{-2}m$; **c)** $x(t)=5.10^{-2}\sin(10t+\frac{\pi}{2})$ (m) ; **d)** $k=100N.m^{-1}$; $m=1kg$.

EXERCICE 3

L'extrémité d'un ressort est reliée à une bille (B) de masse m. L'autre extrémité est fixe. Cette bille peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Le ressort est à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $k = 20\ N.m^{-1}$.



I/- Montrer que le centre d'inertie G de la bille est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal en utilisant.

II/- On considère les cas suivants :

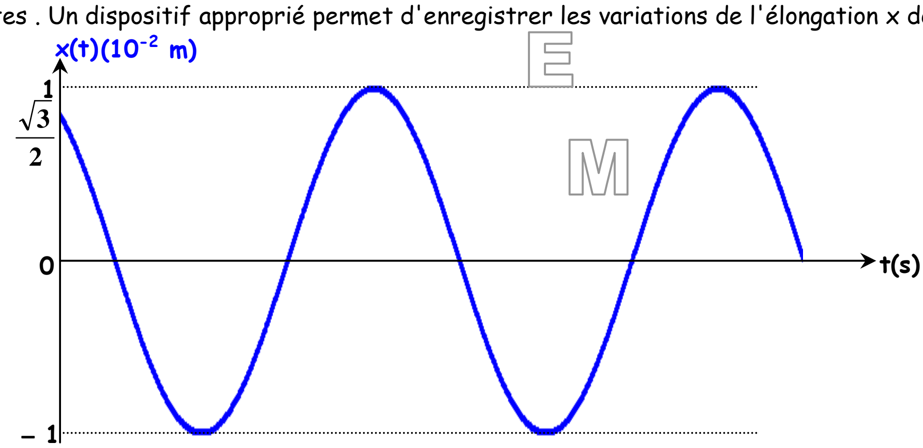
1°) On écarte la bille de sa position d'équilibre en allongeant le ressort d'une longueur $x_m = 2$ cm, puis on la libère sans vitesse initiale à t = 0. La période des oscillations est $T_0 = 0{,}12$ s.

a) Déterminer l'équation horaire de la bille et calculer sa masse m.

b) Calculer la valeur de la vitesse de la bille lorsqu'elle passe par la position d'équilibre.

2°) On écarte la bille de sa position d'équilibre dans le sens négatif et l'abandonne sans vitesse initiale à t = 0.
Sachant que la bille passe par la position d'équilibre avec une vitesse de valeur $\|\vec{v}\| = 2m.s^{-1}$, déterminer l'équation horaire du mouvement de la bille.

3°) On écarte la bille de sa position d'équilibre de x_0 et on la lance avec une vitesse V_0 à l'origine des dates. Un dispositif approprié permet d'enregistrer les variations de l'élongation x de la bille.



Hichem.Benaich@edunet.tn

SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

a) Déterminer , à partir du graphe , l'équation horaire du mouvement de la bille .

b) Montrer que la valeur v de la vitesse , l'élongation x , la pulsation ω_0 et l'amplitude x_m vérifient la relation : $x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = {x_m}^2$. En déduire la valeur algébrique de la vitesse V_0 .

III/- 1°) Déterminer les expressions , en fonction du temps , de l'énergie cinétique E_C de la bille et de l'énergie potentielle élastique E_{pe} système {(B) , ressort} en utilisant **II/ 1°)** .

2°) Déduire l'énergie mécanique du système {(B) , ressort} .

3°) Tracer sur le même graphique $E_C = f(t)$ et $E_{pe} = g(t)$.

4°) A quelles dates l'énergie cinétique est-elle égale à l'énergie potentielle ?

Rép. Num.: I/- • voir cours ; • E=cste$\Rightarrow \frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow$ ... ; • T.E.C. entre t=0 et tqqe : $\frac{1}{2}mv^2=-\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow kx^2+mv^2=0$ puis on dérive par rapport au temps ; **II/-1°) a)** $x=2.10^{-2}\sin(52,36t+\frac{\pi}{2})$(m) ; m=7,3g **b)** $V=\pm1,05m.s^{-1}$; **2°)** $x=3,8.10^{-2}\sin(52,36t-\frac{\pi}{2})$(m) ; **3°) a)** $x=10^{-2}\sin(52,36t+\frac{2\pi}{3})$; $V_0=-0,26m.s^{-1}$;

III/-1°) $E_C=4.10^{-3}\cos^2(52,36t+\frac{\pi}{2})$(J) ; $E_{pe}=4.10^{-3}\sin^2(52,36t+\frac{\pi}{2})$(J) ; **2°)** $E=4.10^{-3}$J ; **4°)** $t=(k+\frac{1}{2})\frac{T_0}{4}$; $k\in$ IN

EXERCICE 4

L'extrémité d'un ressort (R) , est liée à un solide ponctuel de masse m , l'autre extrémité étant fixe . Ce solide peut glisser sans frottement sur un plan horizontal . Le ressort est à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k .
On écarte le solide de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance de 4 cm puis on le lâche sans vitesse initiale . La position d'équilibre est choisie comme origine du repère (x'x) .

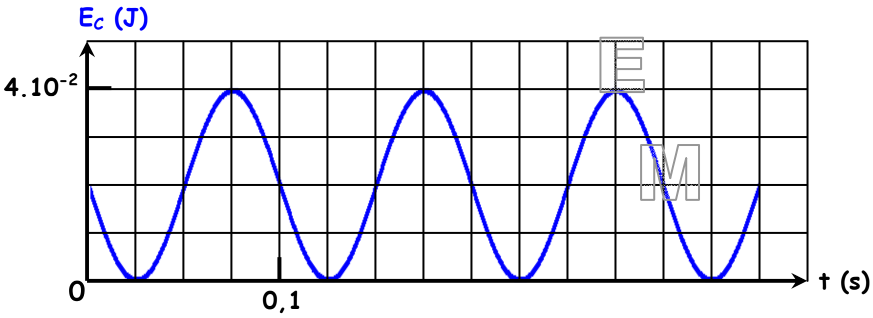
1°) a) Exprimer l'énergie mécanique à un instant t quelconque du système S : {Solide , ressort , Terre} . On supposera nulle l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du plan horizontal .

b) Montrer que le mouvement solide est rectiligne sinusoïdal de pulsation ω_0 . Donner l'expression de ω_0 .

2°) a) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C du solide en fonction du temps . Montrer que cette énergie est une fonction périodique .

b) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p du système S en fonction du temps . Montrer que cette énergie est une fonction périodique .

3°) On donne la représentation graphique de l'énergie cinétique E_C du solide en fonction du temps :



a) Déterminer la constante de raideur k du ressort et la période propre T_0 de l'oscillateur .

b) Déterminer la masse m du solide et l'équation horaire du mouvement du solide .

c) Représenter la courbe de l'énergie potentielle $E_p = f(t)$. Justifier le traçage de cette courbe .

Rép. Num. : 1°) **a)** $E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$; **b)** $E=cste \Rightarrow \frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$; $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$;

2°) **a)** $E_C=\frac{1}{4}kx_m^2[1+\cos(2\omega_0t+2\varphi_x)]$; **b)** $E_p=\frac{1}{4}kx_m^2[1-\cos(2\omega_0t+2\varphi_x)]$; 3°) **a)** $k=\frac{2E_{C\,max}}{x_m^2}=50N.m^{-1}$;

$T_0=0{,}2s$; **b)** $m=\frac{k.T_0^2}{4.\pi^2}=50g$; $x=4.10^{-2}\sin(10\pi t+\frac{\pi}{4})$ (m) .

EXERCICE 5

On dispose d'un corps (C) de masse m = 0,1 Kg supposé ponctuel , pouvant coulisser sans frottement sur une tige (T) horizontale . Le corps (C) est au repos tel que son centre d'inertie G coïncide avec la position O , origine du repère $(O,\vec{i})$. Il est solidaire de l'extrémité d'un ressort (R) à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k , enfilé sur la tige (T) , l'autre extrémité du ressort est fixe comme indiqué sur la figure 1 .

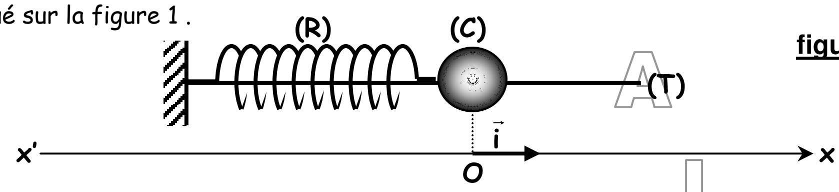


figure 1

1°) On écarte le corps (C) de sa position d'équilibre O jusqu'au point d'abscisse x_0 = + 2 cm et on le lance avec une vitesse $\vec{V}_O$ de même direction et de sens contraire que $\vec{i}$.

Etablir l'expression de l'équation différentielle du mouvement de (C) .

2°) a) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du système { corps (C) , ressort } .

b) Montrer que le système est { corps (C) , ressort } conservatif .

c) Déterminer alors l'expression de l'énergie mécanique E en fonction de m , k , x_0 et V_0 .

d) En exploitant le caractère conservatif du système { corps (C) , ressort } , montrer que le corps (C) oscille entre deux positions extrêmes symétriques par rapport à O dont on déterminera les abscisses x_1 et x_2 en fonction de m , k , x_0 et V_0 .

3°) a) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C du corps (C) en fonction de m , k , x_0 , V_0 et x .

b) On donne la courbe représentant la variation de l'énergie cinétique E_C en fonction du carré de l'élongation x^2 (figure 2) .

Déduire :

- la constante de raideur k du ressort ,
- la valeur V_0 de la vitesse du corps (C) ,
- l'énergie mécanique E ,
- les abscisses des positions extrêmes x_1 et x_2 ,
- la valeur de la vitesse du corps (C) au passage par sa position d'équilibre .

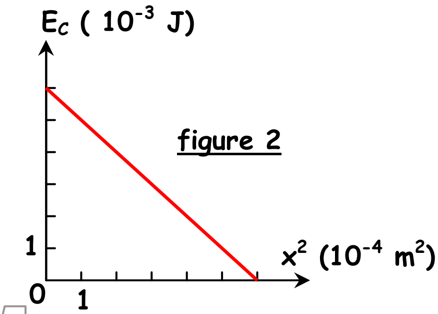


figure 2

Rép. Num. : 1°) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$; 2°) **a)** $E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$; **b)** $\frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow E=cste$; **c)** $E=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2$;

$x=\pm\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}V_0^2}$; $k = 20N.m^{-1}$; $V_0 = -0{,}2m.s^{-1}$; $E = 6.10^{-3}$ J ; $x = \pm 2{,}45.10\text{-}2$ m ; $v = \pm 3{,}46.10\text{-}2\ m.s^{-1}$.

SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

EXERCICE 6 (Devoir de synthèse N°2 (2007/2008) nouveau régime)

I/-Les frottements sont supposés négligeables :

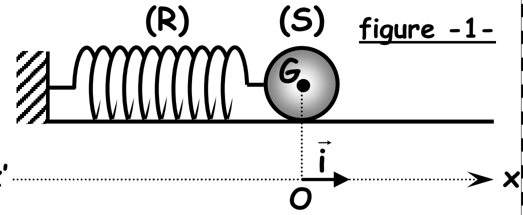


figure -1-

Le pendule élastique représenté par la figure -1- est constitué par :

- ◎ Un ressort (R) à spires non jointives , d'axe horizontal , de masse négligeable et de raideur k .
- ◎ Un solide (S) , supposé ponctuel , de centre d'inertie G et de masse m .

Lorsque (S) est au repos , son centre d'inertie G occupe la position O origine d'un axe x'Ox horizontal .

On écarte (S) de sa position d'équilibre O jusqu'au point d'abscisse $x_0 = -2\sqrt{2}$ cm et on lui communique une vitesse v_0 à un instant qu'on prendra comme origine des dates .

A une date t quelconque , le centre d'inertie G de (S) a une élongation x et sa vitesse instantanée est v .

1°) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique , monter que le solide (S) est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de période propre T_0 dont on donnera l'expression en fonction de m et k .

2°) a) Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système { solide (S) , ressort (R) } lorsque (S) passe par un point M quelconque d'abscisse x avec une vitesse v .

b) Déduire de 1°) que le système { solide (S) , ressort (R) } est conservatif .

3°) L'enregistrement graphique de ce mouvement est représenté sur la figure – 2 - .

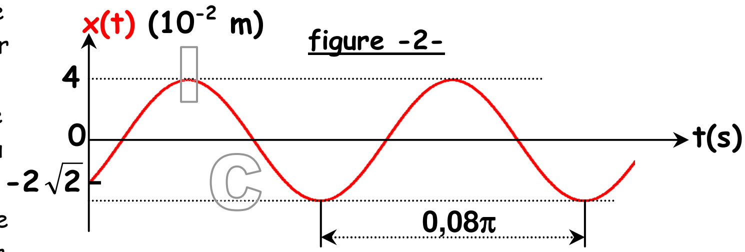


figure -2-

a) Déterminer à partir du graphe la figure – 2 - l'équation horaire du mouvement de (S) .

b) Déduire la valeur de la vitesse initiale v_0 ainsi que sa valeur maximale v_m .

4°) La courbe de la figure – 3 - représente les variations de l'énergie cinétique $E_C(t)$ du solide (S) en fonction du temps .

a) Etablir l'expression de l'énergie cinétique E_C en fonction du temps .

b) Montrer , en utilisant la courbe ci-contre , que k a pour valeur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$.
Déduire alors la valeur de m .

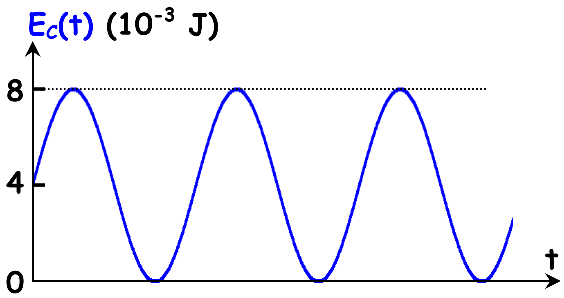


figure -3-

II/-Les frottements ne sont plus négligeables :

A l'aide d'un dispositif approprié , on soumet maintenant le solide (S) à des frottements visqueux dont la résultante est $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse instantanée du centre d'inertie G de (S) .

1°) a) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique , établir l'équation différentielle régissant le mouvement du solide (S) .

b) Déduire que l'énergie mécanique E du système { solide (S) , ressort (R) } n'est pas conservée au cours du temps .

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres

2°) L'enregistrement des différentes positions de G au cours du temps donne la courbe de la figure – 4 - .

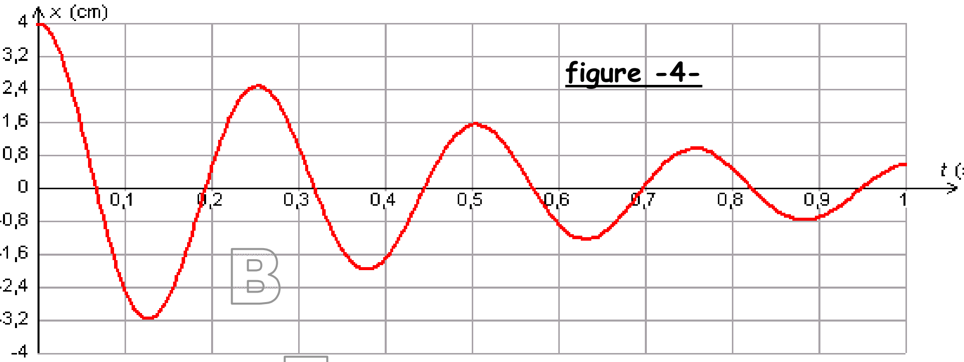


figure -4-

Déterminer la perte d'énergie entre les instants t_1 = 0s et t_2 = 2T .
(**T** étant la pseudo-période) .

Rép. Num. : **I/-1°)** $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; **2°) a)** $E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$; **b)** $\frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow E=cste$; **3°) a)** $x(t) = 4.10^{-2}.\sin(25t-\frac{\pi}{4})$ (m) ;

b) $v(t) = \cos(25t-\frac{\pi}{4})$ (m.s^{-1}) , $v_0 = v(t=0) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = 0,71$ m.s^{-1} ; $v_m = 1$ m.s^{-1} ;

4°) a) $E_C(t)=\frac{1}{2}k.x_m^2.\cos^2(\omega_0 t+\varphi_x)$; **b)** $k=\frac{2.E_{C\max}}{x_{\max}^2}=10$ N.m^{-1} ; $m=\frac{2.E_{C\max}}{v_{\max}^2}=\frac{k}{\omega_0^2}=0,016$ kg

II/-1°) a) $kx+h\frac{dx}{dt}+m\frac{d^2x}{dt^2}=0$; **b)** $\frac{dE}{dt}=-hv^2\le 0$; **2°)** $\Delta E=\frac{1}{2}k.(x_{2m}^2-x_{1m}^2)=-6,72.10^{-3}$ J .

EXERCICE 7 (Contrôle 2008 ancien régime)

Au cours d'une séance de TP , un groupe d'élèves étudie le mouvement d'un solide (S) de masse m attaché à un ressort (R) à spires non jointives de raideur k . L'ensemble est posé sur un banc à coussin d'air horizontal comme l'indique la figure 1 . A l'équilibre , le ressort n'est ni allongé ni comprimé .
Avec un système approprié , on enregistre la position du centre d'inertie G de (S) à chaque instant t . Cette position est repérée sur l'axe x'x orienté de gauche à droite par un point d'abscisse x .
L'origine O du repère $(O,\vec{i})$ coïncide avec la position du centre d'inertie G lorsque (S) est à l'équilibre .

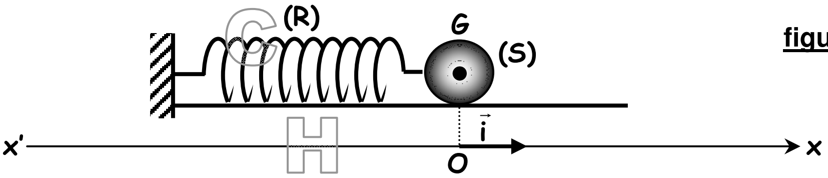


figure 1

En écartant (S) de sa position d'équilibre et en l'abandonnant à lui-même à t = 0 , le solide (S) effectue des oscillations dont l'enregistrement est schématisé sur la figure 2 qui va servir pour répondre aux questions suivantes .

1°) Préciser en le justifiant si le solide (S) :
a) Est écarté vers la droite ou vers la gauche .
b) Est lancé avec ou sans vitesse initiale .
c) Effectue des oscillations amorties ou non amorties .

2°) Déterminer la valeur de la période T_0 de ces oscillations et en déduire la valeur de la pulsation ω_0 correspondante .

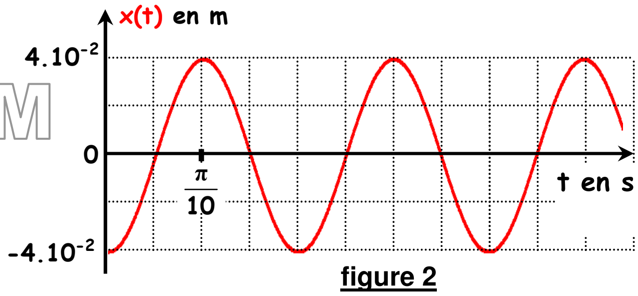


figure 2

SERIE DE PHYSIQUE N° 5
Oscillations mécaniques libres

3°) Déterminer l'amplitude X_m des oscillations et la phase initiale φ à t = 0 .

4°) Ecrire l'équation horaire x = f(t) .

5°) En tenant compte de ce qui précède et sachant que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

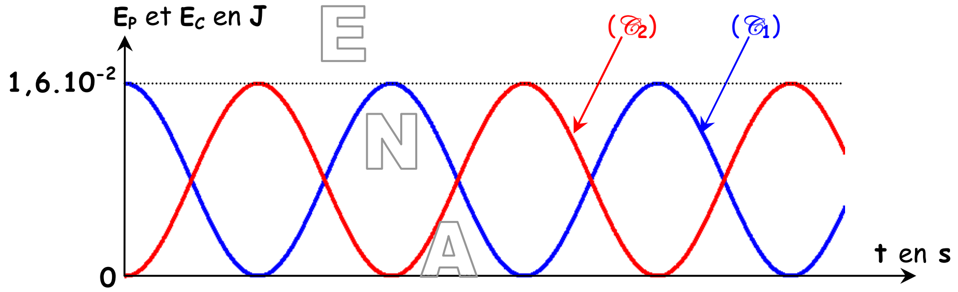
a) Exprimer en fonction de t , m , k , X_m et φ , à un instant t quelconque , l'énergie potentielle E_p du système S = { mobile , ressort , terre } et l'énergie cinétique E_C .

b) En déduire que l'énergie mécanique E_m du système S , reste constante au cours du temps .

c) Identifier en le justifiant laquelle des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la figure 3 correspond à E_C = f(t) .

d) Déduire , à partir des courbes , les valeurs de la raideur k et de la masse m .

On donne les courbes de la figure 3 représentant les variations de E_p et de E_C en fonction du temps .



Rép. Num. : **1°) a)** Vers la gauche (x_0<0) ; **b)** $X_m=x_0 \Rightarrow v_0=0$; **c)** X_m=cste $\Rightarrow$Osc. non am. ; **2°)** $T_0=\frac{\pi}{5}$ s ; $\omega_0=10 rad.s^{-1}$;

3°) $X_m=4.10^{-2}$m ; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ rad ; **4°)** $x(t)=4.10^{-2}\sin(10t-\frac{\pi}{2})$ (m) ;

5°) a) $E_P(t)=\frac{1}{2}kX_m^2.\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)$; $E_C(t)=\frac{1}{2}kX_m^2.\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)$; **b)** $E_m=\frac{1}{2}kX_m^2= E_P(t)+ E_C(t)$=cste ;

c) A t=0 , x=-$X_m \Rightarrow$v=O$\Rightarrow E_C$=0$\Rightarrow$EC(t) :courbe $\mathscr{C}_2$; **d)** $k=\frac{2E_{C\,max}}{X_m^2}$ =20N.m^{-1} ; $m=\frac{k}{\omega_0^2}$ =0,2kg .

EXERCICE 8

Un ressort , de constante de raideur k , est enfilé sur une tige horizontale . L'une des extrémités du ressort est fixée , l'autre est attachée à un solide (S) de masse m = 0,5 kg pouvant coulisser sur la tige .

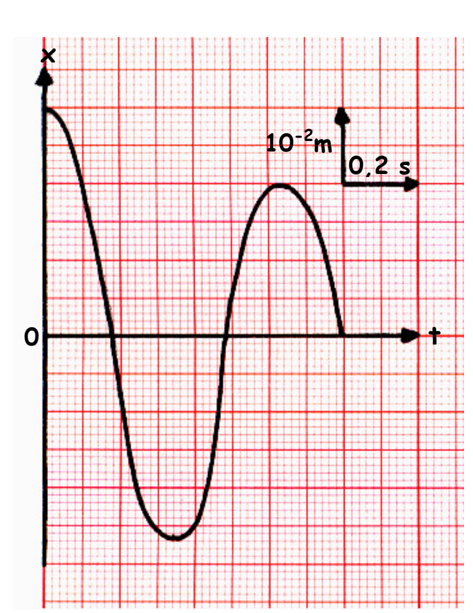
Le solide (S) est soumis à une force de frottement de la forme : $\vec{f} = -h\vec{v}$ (h > 0) .

1°) L'abscisse x du solide (S) dans le repère $(0,\vec{i}\,)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 200x = 0$$

Déterminer la constante de raideur k et le coefficient de frottement h .

2°) On écarte (S) de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à l'origine des dates . L'abscisse x varie suivant la courbe ci-contre .



a) Déterminer graphiquement la pseudo-période T des oscillations .

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

Oscillations mécaniques libres

Oscillations mécaniques libres

b) Calculer l'énergie mécanique initiale E_1 de l'oscillateur à la date $t_1 = 0$.

c) Calculer l'énergie mécanique de E_2 de l'oscillateur à la date $t_2 = T$.

d) Déduire la perte d'énergie entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = T$.

Rép. Num. : **1°)** $h=2kg.s^{-1}$; $k=50N.m^{-1}$; **2°) a)** $T = 0,64s$; **b)** $E_1=225.10^{-4}J$; **c)** $E_2=100.10^{-4}J$; **d)** $\Delta E=-125.10^{-4}J$