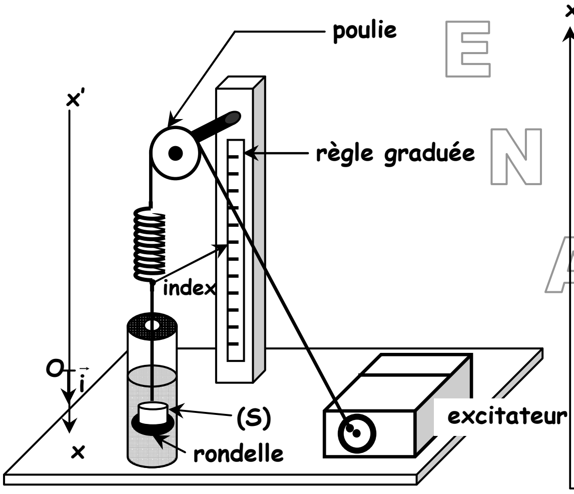
Hichem.Benaich@edunet.tn *Proposée par Benaich Hichem*

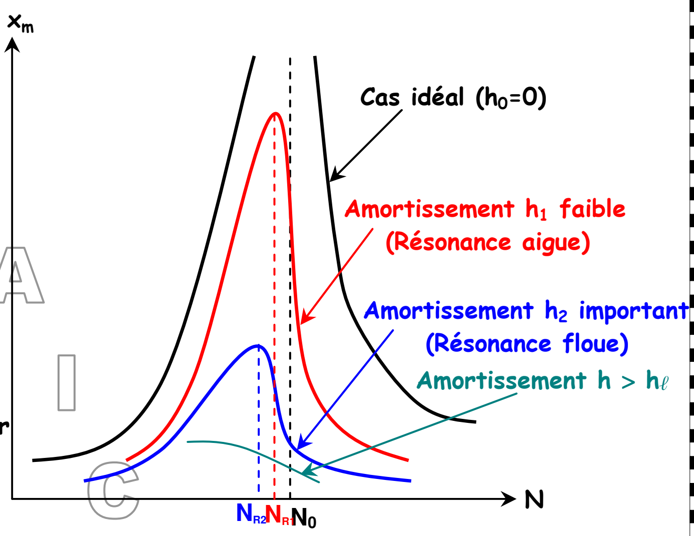
SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

RAPPEL DU COURS

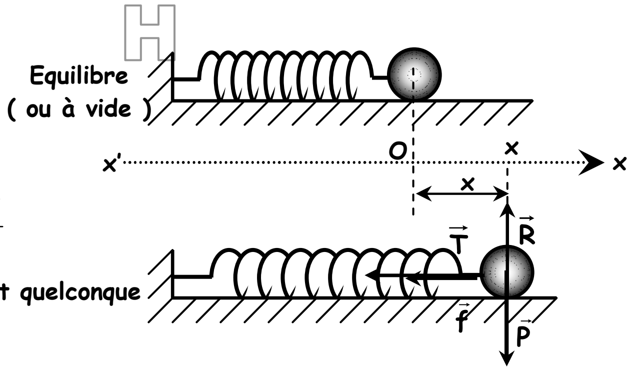
I / Etude expérimentale :





II / Etude théorique :

1°) Equation différentielle :



Système = { S }

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$, $\vec{T}$ et $\vec{F}$

R.F.D. : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur (x'x) : $-\|\vec{T}\| - \|\vec{f}\| + F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{kx + h\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt^2} = F_m.\sin(\omega t + \varphi_F)}$$

Cette équation différentielle admet comme solution : $x = x_m\sin(\omega t + \varphi_x)$

pulsation du moteur (excitateur) ⟶ ω

⇒ on parle d'oscillations **focées** .

$kx = k\,x_m\sin(\omega t + \varphi_x) \longrightarrow \vec{V_1}\,(k\,x_m\,,\,\varphi_x)$

$h\dfrac{dx}{dt} = h\,\omega\,x_m\sin(\omega t + \varphi_x + \dfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \vec{V_2}\,(h\,\omega\,x_m\,,\,\varphi_x + \dfrac{\pi}{2})$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\,\omega^2\,x_m\sin(\omega t + \varphi_x + \pi) \longrightarrow \vec{V_3}\,(m\,\omega^2\,x_m\,,\,\varphi_x + \pi)$

$F_m\sin(\omega t + \varphi_F) \longrightarrow \vec{V}\,(F_m\,,\,\varphi_F)$

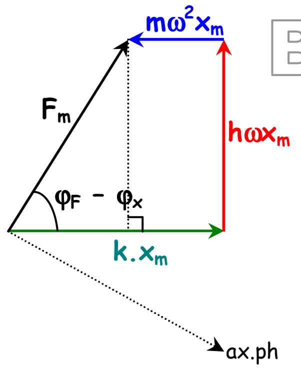
Hichem.Benaich@edunet.tn Proposée par Benaich Hichem

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

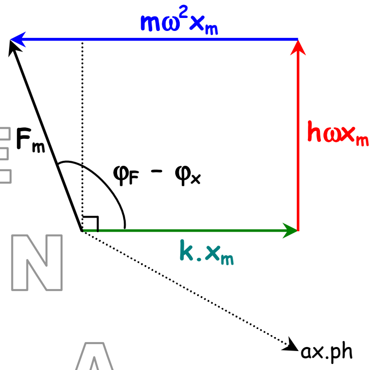
OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

$(*) \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$

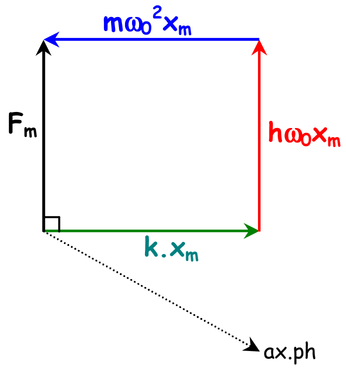
1er cas : $m\omega^2 < k \Rightarrow \omega < \omega_0$



2ème cas : $m\omega^2 > k \Rightarrow \omega > \omega_0$



3ème cas : $m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \omega_0$



$$\boxed{\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$$

x(t) est toujours en retard de phase par rapport à F(t)

❖ ***Calcul de x_m*** :

1er cas : $\omega \neq \omega_0$ ($\omega > \omega_0$ ou $\omega < \omega_0$)

$F_m^2 = (h\omega x_m)^2 + (k - m\omega^2)x_m^2$

$$\Rightarrow \boxed{x_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}}$$

2ème cas : $\omega = \omega_0$

$$F_m = h\omega_0 x_m \Rightarrow \boxed{x_m = \frac{F_m}{h\omega_0}}$$

❖ ***Calcul de φ_x*** :

1er cas : $\omega \neq \omega_0$ ($\omega > \omega_0$ ou $\omega < \omega_0$)

$$\boxed{tg(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega}{k - m\omega^2}} \qquad \boxed{\sin(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega x_m}{F_m}} \qquad \boxed{\cos(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{k - m\omega^2}{F_m}}$$

2ème cas : $\omega = \omega_0$

$$\boxed{\varphi_x = \varphi_F - \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$$

❖ ***Résonance d'amplitude*** :

x_m est max. $\Rightarrow [\ h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2\ ]$ est min

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}[\ h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2\ ] = 0$$

$$\Rightarrow 2h^2\omega_R + 2(k - m\omega_R^2).(-2.m.\omega_R) = 0$$

$$\Rightarrow 2\omega_R[\ h^2 - 2m.(k - m\omega_R^2)\ ] = 0$$

$$\Rightarrow h^2 - 2mk + 2m^2\omega_R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_R^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} \Rightarrow \omega_R^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

soit $\boxed{N_R^2 = N_0^2 - \dfrac{h^2}{8\pi m^2}}$

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

Etude du cas idéal : (h = 0)

Pour h = 0 , $\omega_R = \omega_0$ et $N_R = N_0$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2}} = \frac{F_m}{|k - m\omega^2|}$$

Si $\omega_R \to \omega_0$ alors $N_R \to N_0$ alors $x_m \to +\infty$ (F_m = cste > 0 et $|k - m\omega^2| \to 0^+$) donc risque de rupture du ressort.

Remarque :

Pour avoir résonance , il faut que $\omega_R^2 > 0 \Rightarrow \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} > 0 \Rightarrow \frac{h^2}{2m^2} < \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow h < \sqrt{2km} = h_\ell$$

h_ℓ étant la valeur limite qu'il ne faut pas dépasser sinon , on n'a plus de résonance .

Résonance de vitesse :

L'équation différentielle précédente peut aussi s'écrire : $\boxed{hv + m\frac{dv}{dt} + k\int v\,dt = F_m\sin(\omega t + \varphi_F)}$

Cette équation différentielle admet comme solution $v = v_m\sin(\omega t + \varphi_v)$

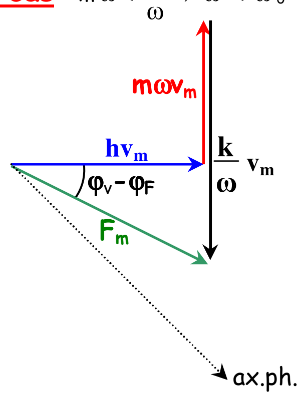
$hv = hv_m\sin(\omega t + \varphi_v) \longrightarrow \vec{V}_1\,(hv_m\,,\,\varphi_v)$

$m\frac{dv}{dt} = m\omega v_m\sin(\omega t + \varphi_v + \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \vec{V}_2\,(m\omega v_m\,,\,\varphi_v + \frac{\pi}{2})$

$k\int v\,dt = \frac{k}{\omega}v_m\sin(\omega t + \varphi_v - \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \vec{V}_3\,(\frac{k}{\omega}v_m\,,\,\varphi_v - \frac{\pi}{2})$

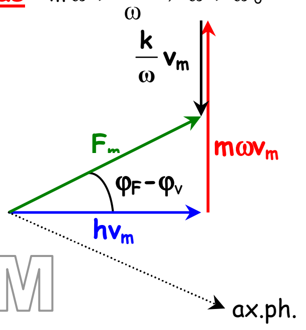
$F_m\sin(\omega t + \varphi_F) \longrightarrow \vec{V}\,(F_m\,,\,\varphi_F)$

1^er cas : $m\omega < \frac{k}{\omega} \Rightarrow \omega < \omega_0$



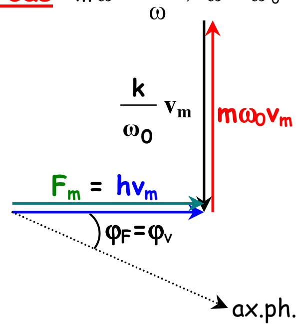
v(t) est **en avance** de phase par rapport à F(t)

2^ème cas : $m\omega > \frac{k}{\omega} \Rightarrow \omega > \omega_0$



v(t) est **en retard** de phase par rapport à F(t)

3^ème cas : $m\omega = \frac{k}{\omega} \Rightarrow \omega = \omega_0$



Résonance de vitesse

$\boxed{\varphi_v = \varphi_F}$

v(t) et F(t) sont **en phase**

Contrairement à x(t) , v(t) peut être soit en avance , soit en retard soit en phase avec F(t) .

SERIE DE PHYSIQUE N° 5

OSCILLATIONS FORCEES

$$\boxed{V_m = \frac{F_m}{h}}$$

❖ Calcul de V_m :

1er cas : $\omega \neq \omega_0$ ($\omega > \omega_0$ ou $\omega < \omega_0$)

$$F_m^2 = (hV_m)^2 + [(m\omega - \frac{k}{\omega})V_m]^2 \Rightarrow \boxed{V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}}}$$

2ème cas : $\omega = \omega_0$

$hV_m = F_m \Rightarrow \boxed{V_m = \frac{F_m}{h}}$ (résultat qu'on peut retrouver en utilisant l'expression précédente pour $\omega = \omega_0$)

❖ Calcul de φ_V :

1er cas : $\omega < \omega_0$

$\varphi_V - \varphi_F > 0 \Rightarrow tg(\varphi_V - \varphi_F) > 0$

$$\boxed{tg(\varphi_V - \varphi_F) = \frac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{h}}$$

2ème cas : $\omega > \omega_0$

$\varphi_V - \varphi_F < 0 \Rightarrow tg(\varphi_V - \varphi_F) < 0$

$$\boxed{tg(\varphi_V - \varphi_F) = \frac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{h}}$$

3ème cas : $\omega = \omega_0$

$$\boxed{\varphi_V = \varphi_F}$$

Résonance de vitesse

❖ Résonance de vitesse :

V_m est max $\Rightarrow [h^2 + (m\omega_R - \frac{k}{\omega_R})^2]$ est min $\Rightarrow (m\omega_R - \frac{k}{\omega_R})^2$ est min (h = cste)

$\Rightarrow m\omega_R - \frac{k}{\omega_R} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_R = \omega_0} \Rightarrow \boxed{N_R = N_0}$ (quelque soit l'amortissement)

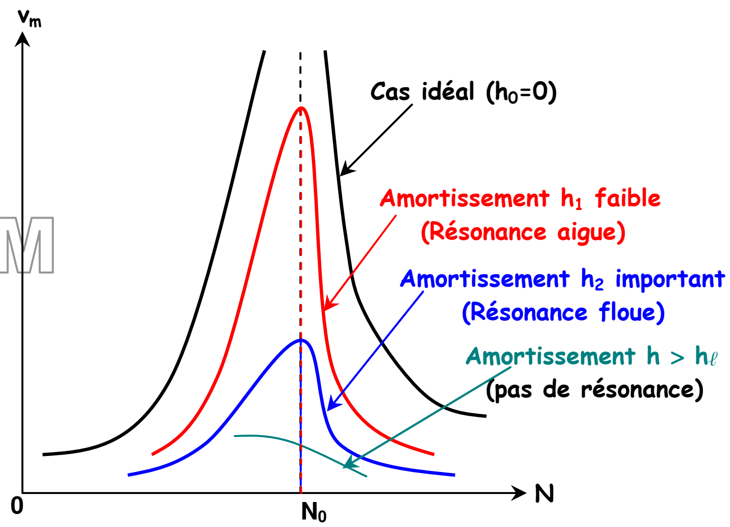
❖ Etude du cas idéal : (h = 0)

$$V_m = \frac{F_m}{\sqrt{(m\omega - \frac{k}{\omega})^2}} = \frac{F_m}{\left|m\omega - \frac{k}{\omega}\right|}$$

$\omega_R = \omega_0$ et $N_R = N_0$ (h = 0)

Si $\omega_R \to \omega_0$ alors $V_m \to +\infty$

(F_m = cste > 0 et $\left|m\omega - \frac{k}{\omega}\right| \to 0^+$)



Hichem.Benaich@edunet.tn

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

EXERCICE 1

Un oscillateur est formé d'un ressort de constante de raideur k et d'un solide (S) de masse m . L'ensemble { ressort ; solide (S) } est disposé horizontalement . Le solide (S) est soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F).\vec{i}$ et une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$. L'abscisse x du centre d'inertie G de (S) dans le repère $(O, \vec{i})$ a pour expression $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$ avec O : la position de G à l'équilibre .

Au cours d'une séance de travaux pratiques , on a relevé les valeurs des amplitudes x_{max} des élongations et v_{max} des vitesses en fonction de la fréquence N de l'excitateur .

N(Hz)	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,8
x_{max}(cm)	3,25	4,5	6,35	9,5	11,35	12,8	13,6	13	11,3	9,9	8,4	5,9
$v_{max}(10^{-2}m.s^{-1})$												

1°) Proposer un schéma expérimental et décrire avec précision le mode opératoire permettant la détermination de x_{max} et v_{max} .

2°) Compléter le tableau en calculant les valeurs de v_{max} .

3°) Donner les valeurs des couples (N_1 ; x_{max_1}) à la résonance d'élongation et (N_2 ; v_{max_2}) à la résonance de vitesse .

4°) Donner les expressions de x_{max} et de v_{max} en fonction de N , N_0 , h , m et F_m . (N_0 étant la fréquence propre de l'oscillateur) .

5°) Etablir la relation entre N_1 et N_2 .

6°) Sachant que la masse du solide est égale à 0,1kg , déterminer h et F_m .

7°) On remplace le ressort (R) par un ressort (R') de raideur k' . En augmentant la fréquence de l'excitateur à partir de 2,2Hz , on constate que l'amplitude es oscillations commence par augmenter , atteint un maximum puis diminue . La valeur de k' est-elle plus grande ou plus petite que celle de k ? justifier .

8°) Donner le schéma du circuit électrique permettant de faire une étude expérimentale analogue à l'étude précédente .

Rép. Num. : **1°)** voir T..P. ; **3°)** (N_1=2,1Hz ; x_{max_1} =13,6.10^{-2}m) ; (N_2=2,2Hz ; v_{max_2} =179,7.10^{-2}m.s^{-1}) ;

4°) $x_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{4\pi^2 h^2 N^2 + 16\pi^4 m^2 (N^2 - N_0^2)^2}}$; $v_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 m^2 (N - \frac{N_0^2}{N})^2}}$ **5°)** $N_1^2 = N_2^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 m^2}$;

6°) $h = 2\sqrt{2}\,\pi\, m \sqrt{N_2^2 - N_1^2}$ =0,58kg.s^{-1} ; $F_m = h\, v_{max_2}$ =1,04N; **7°)** $N_0' > N_0 \Rightarrow \omega_0' > \omega_0 \Rightarrow k' > k$; **8°)** (R,L,C)

EXERCICE 2

Un oscillateur est formé d'un ressort de constante de raideur k = 500 N.m^{-1} et d'un solide (S) de masse m = 50 g . L'ensemble { ressort ; solide (S) } est disposé horizontalement . Le solide (S) est excité par un électroaimant parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence N_e réglable et comprise entre 5 Hz et 25 Hz . On admet que cet électroaimant exerce sur l'oscillateur une force sinusoïdale de la forme $\vec{F} = 40\sin(2\pi N_e t).\vec{i}$ ($\vec{i}$ étant un vecteur unitaire horizontal) .

1°) Soit x l'abscisse du centre d'inertie G de l'aimant dans le repère $(O, \vec{i})$; (O étant la position de G à l'équilibre) .

a) Etablir l'équation différentielle reliant x et sa dérivée seconde par rapport au temps .

b) On admet dans cette question que x a pour expression : $x = x_m \sin(2\pi N_e t + \varphi_x)$.
Montrer que la force excitatrice et l'abscisse x de G sont en phase si $N_e < N_0$ et en opposition de phase si $N_e > N_0$. (N_0 est la fréquence propre de l'oscillateur) ; donner la valeur de φ_x dans les deux cas .

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

c) Calculer les amplitudes des oscillations pour des fréquences égales à 10Hz et 20Hz .

d) Donner l'allure de la courbe représentant la variation de l'amplitude x_m du mouvement de l'aimant en fonction de la fréquence excitatrice .

2°) Un dispositif d'amortissement exerce maintenant sur l'excitateur une force $\vec{f} = -h\vec{v}$; $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse de l'aimant et $h = \pi\ kg.s^{-1}$.

a) Etablir l'équation différentielle reliant x à ses dérivées première et seconde par rapport au temps .

b) Pour N_e = 20 Hz , déduire à partir de la construction de Fresnel :

- la phase initiale de l'abscisse x de G ;
- la valeur de l'amplitude x_m .

Donner l'expression de x en fonction du temps .

Rép. Num. : 1°) **a)** $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F$; **b)** ♦Pour $N_e < N_0$, $\varphi_x=0$; ♦Pour $N_e > N_0$, $\varphi_x=\pi$; **c)** ♦Pour N_e=10Hz , x_m=13,2cm ; ♦Pour N_e=20Hz , x_m=13,8cm ; **d)** Pour $N=N_0$, il y'a rupture de l'oscillateur ;

2°) **a)** $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F$; **b)** φ_x=-2,2rad ; x_m=8,2cm ; $x(t)=8,2.10^{-2}\sin(40\pi t-2,2)$ (m)

EXERCICE 3

I/- Un oscillateur est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 500\ N.m^{-1}$ et d'un solide (S) de masse m = 100 g . L'ensemble { ressort ; solide (S) } est disposé horizontalement .

1°) Calculer la pulsation et la fréquence propres de l'oscillateur libre .

2°) Le solide (S) est soumis , de plus à des frottements visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$.
Quelle est l'allure de variation de x abscisse du centre d'inertie du solide (S) compté à partir de sa position d'équilibre en fonction du temps ? (envisager les 2 cas possibles) .

II/- Pour entretenir les oscillations de (S) , on l'excite à l'aide d'une force verticale et sinusoïdale $\vec{F}$ telle que $F=F_m \sin\omega t$.
L'abscisse x de (S) varie alors suivant l'équation horaire $x = x_m.\sin(\omega t + \varphi)$.

1°) Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S) en fonction de x , $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$.

2°) En déduire :

a) l'amplitude maximale x_m de x ;

b) la phase initiale de x .

c) Pour quelle valeur ω_1 de ω, x_m est-elle maximale ? la calculer .

d) Quelle doit être la valeur du coefficient h pour obtenir la résonance d'amplitude pour la pulsation $\omega = \omega_0$? Conclusion .

<u>On donne</u> : $F_m = 10\sqrt{2}$ N ; $h = \frac{\pi}{2}\ kg.s^{-1}$; $\omega = 20\ \pi\ rad.s^{-1}$; $\pi^2 = 10$.

3°) a) Exprimer la vitesse v de (S) en fonction du temps .

b) Réécrire l'équation différentielle du mouvement de (S) en fonction de v .

c) Construire le diagramme de Fresnel correspondant .

d) Déterminer l'impédance mécanique de l'oscillateur et la puissance moyenne absorbée .

4°) Montrer que pour obtenir la résonance de vitesse , on peut procéder de deux façons différentes et indépendantes :

a) Accrocher une surcharge (S') de masse m' au solide (S) .

b) Remplacer le ressort (R) par un deuxième ressort (R') de constante de raideur k'. Calculer m' et k' .

Hichem.Benaich@edunet.tn

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

5°) Calculer dans le cas de la résonance de vitesse du pendule :

a) La valeur maximale de v_m .

b) Le facteur de qualité de l'oscillateur .

c) L'énergie dissipée par l'oscillateur pendant 100 oscillations .

Rép. Num. : **I/ 1°)** ω_0=70,71rad.s^{-1} ; N_0=11,25Hz ; **2°)** Voir cours ;

II/ 1°) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+h\dfrac{dx}{dt}+kx=F_m\sin\omega t$; **2°) a)** x_m=0,1m ; **b)** $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ rad ; **c)** ω_1=69,82rad.s^{-1} ; **d)** h'=0 et $x_m\to+\infty$;

3°) a) $v(t)=6{,}28\sin(20\pi t+\dfrac{\pi}{4})$ (m.s^{-1}) ; **b)** $hv+m\dfrac{dv}{dt}+k\int v\,dt=F_m\sin\omega t$; **d)** Z=2,3Ω ; P=31W ;

4°) a) m'=0,025kg ; **b)** k'=400N.m^{-1} ; **5°) a)** v_m=9m.s^{-1} ; **b)** Q=4,5 ; **c)** E=565J .

EXERCICE 5 (Bac 93 ancien régime)

A/ Une étude expérimentale des oscillations libres d'un pendule élastique horizontal (fig. 1) fournit les courbes de la figure 2 représentant respectivement l'énergie potentielle élastique E_{pe} (courbe I) et l'énergie mécanique E (courbe II) du système S = { corps (C) de masse m , ressort } en fonction de l'élongation x de l'oscillateur .

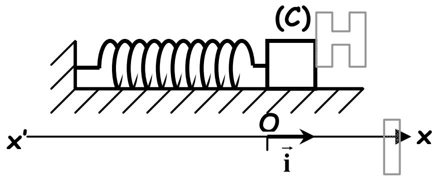


Fig. 1

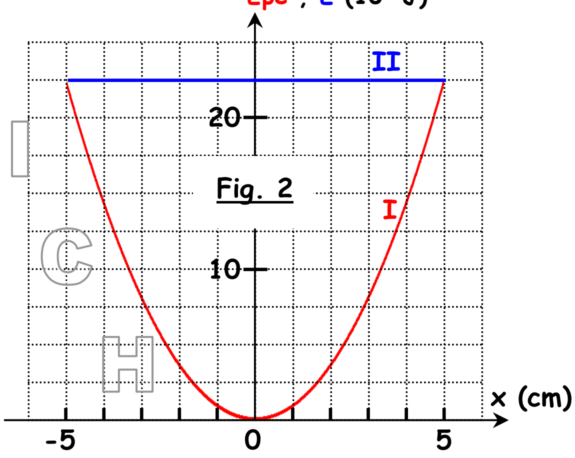


Fig. 2

1°) a) Déterminer graphiquement la valeur de l'énergie E du système (S) .

b) Le système est-il soumis à des forces de frottement ? Justifier la réponse .

2°) a) Déterminer graphiquement l'élongation du corps (C) qui correspond à l'énergie potentielle maximale du système (S) . En déduire la valeur de l'énergie cinétique correspondante E_C .

b) Préciser l'amplitude des oscillations libres de (C) . Justifier la réponse .

c) Calculer la valeur de k du ressort utilisé .

3°) Déterminer graphiquement E_p et E_C lorsque x = 3 cm .

B/ Le système (S) de la figure 1 est excité maintenant par une force $\vec{F}=F\,\vec{i}$ qui s'exerce sur le corps (C) avec $F=F_m\sin(2\pi Nt)$.

F_m désigne la valeur maximale de F ; N la fréquence des excitations et t le temps .

Lorsqu'il oscille , le corps (C) est soumis à des frottements équivalents à une force $\vec{f}=-h\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse instantanée du corps (C) .

1°) a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du corps (C) .

b) En admettant que l'élongation du corps (C) en régime forcé est de la forme : $x=x_m\sin(2\pi Nt+\varphi)$, déterminer :

- l'amplitude x_m en fonction de N , F_m , k , h et m .
- le déphasage φ entre x et F en fonction de N , k , h et m .

2°) a) Montrer que la résonance d'élongation s'obtient à la fréquence N_R telle que :

$$N_R^2=N_0^2-\frac{h^2}{8\pi^2m^2}$$ avec N_0 : fréquence propre du résonateur (S) .

Calculer N_0 et N_R .

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

b) Expliquer qualitativement comment évolue l'amplitude x_m en fonction de N dans les deux cas suivants :
- frottement négligeable ;
- frottement important .

On donne m = 0,5 Kg ; h = 1,79 Kg.s^{-1} .

Rép.Num. : A/ 1°) a) $E=22{,}5.10^{-3}$J; **b)** E=cste ⇒pas de frottement ; **2°) a)** x=±5cm ; $E_C=0$; **b)** x_m=5cm ; **c)** $k=\frac{2E}{x_m^2}=18N.m^{-1}$

3°) $E_p=8.10^{-3}$J ; $E_C=14{,}5.10^{-3}$J .

B/ 1°) a) $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=F$; **b)** $x_m=\frac{F_m}{\sqrt{4\pi^2N^2h^2+(k-4\pi^2N^2m)^2}}$; $tg\varphi=\frac{2\pi Nh}{k-4\pi^2N^2m}$;

2°) a) $N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ =0,96Hz ; N_R=0,87Hz ; **b)** frottement négligeable : $N_R=N_0$ et $x_m\rightarrow+\infty$;

frottement important : résonance floue .

EXERCICE 6 (Bac 96 modifié)

L'extrémité d'un ressort (R) , est liée à un solide ponctuel de masse m , l'autre extrémité étant fixe . Ce solide peut glisser sans frottement sur un plan horizontal . Le ressort est à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k .
On écarte le solide de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance x_0 puis on le lâche sans vitesse initiale . La position d'équilibre est choisie comme origine du repère (x'x) .

1°) Etablir l'équation différentielle reliant x et $\frac{d^2x}{dt^2}$;

2°) A une date t quelconque , le centre d'inertie G de (S) a une élongation x et sa vitesse instantanée est v .

a) Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système { solide (S) , ressort } en fonction de k et x .

b) Montrer que cette énergie mécanique E est constante . Exprimer sa valeur en fonction de k , x_0 .

2°) A l'aide d'un dispositif approprié , on mesure la vitesse instantanée v du solide (S) pour différentes élongations x du centre d'inertie G de (S) .
Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe $v^2 = f(x^2)$ (fig. 2) .

a) Justifier théoriquement l'allure de la courbe en établissant l'expression de v^2 .

b) En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et l'amplitude x_0 du mouvement de (S) .

c) Etablir l'équation horaire du mouvement .

d) Sachant que l'énergie mécanique E du système est égale à 0,125 J , calculer les valeurs de la constante de raideur k du ressort et la masse m du solide (S) .

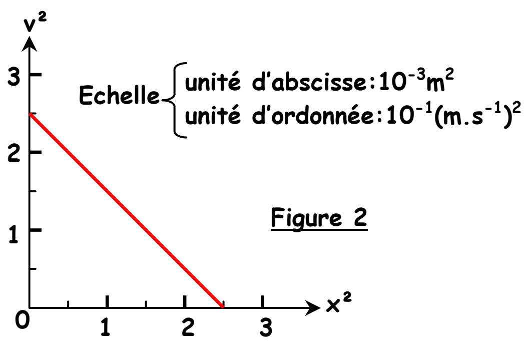


Figure 2

3°) On exerce maintenant sur le solide (S) une force $\vec{F}=F_m \sin\omega t.\vec{i}$ dont la pulsation ω est réglable .
Le solide (S) prend alors un mouvement sinusoïdal forcé d'équation : $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S) .

b) Pour quelles valeurs de la pulsation ω les grandeurs x et F sont-elles :
- en phase ?
- en opposition de phase ?

SERIE DE PHYSIQUE N° 6
OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

c) Etablir l'expression de x_m en fonction de ω . Que se passe-t-il si $\omega = \omega_0$?

Rép. Num. : 1°) $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$; **2°) a)** $E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$; **b)** $\frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow E=cste$; $E=\frac{1}{2}kx_0^2$; **2°) a)** $v^2=-\omega_0^2x^2+\omega_0^2x_0^2$;

b) $\omega_0=10rad.s^{-1}$; $x_0=5.10^{-2}m$; **c)** $x(t)=5.10^{-2}\sin(10t+\frac{\pi}{2})(m)$; **d)** $k=\frac{2E}{x_0^2}=100N.m^{-1}$; $m=\frac{k}{\omega_0^2}=1kg$;

3°) a) $m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=F$; **b)** Pour $\omega>\omega_0$, x et F sont en opp. de phase ; pour $\omega<\omega_0$ y et F sont en phase ;

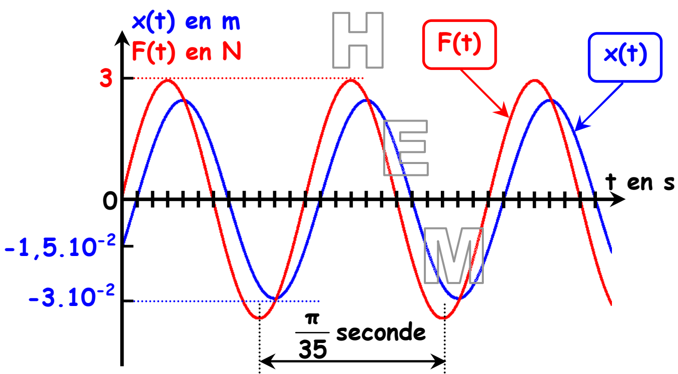
c) $x_m=\frac{F_m}{|k-m\omega^2|}$; pour $\omega=\omega_0$; $x_m \to +\infty$.

EXERCICE 7 (Bac 97 modifié)

Un oscillateur est formé d'un ressort (R) de constante de raideur k et d'un solide (S) de masse M = 50 g . On suppose que le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux de la forme $\vec{f}=-h\vec{v}$ où h est une constante positive . Les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force supplémentaire $\vec{F}=F(t).\vec{i}=F_m\sin(\omega_e t).\vec{i}$ exercée à l'aide d'un dispositif approprié jouant le rôle d'excitateur . Dans ce cas , à tout instant t au cours du mouvement , l'élongation x de G , sa vitesse instantanée $v=\frac{dx}{dt}$ et son accélération $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ vérifient la relation :

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+k'x=F_m\sin(\omega_e t) \text{ dont la solution est } x(t)=x_m\sin(\omega_e t+\varphi_x) .$$

Les fonctions x(t) et F(t) sont représentées sur le diagramme de la figure ci-dessous .



1°) Au cours de ces oscillations forcées , il y'a échange d'énergie entre le résonateur {(R) + (S)} et l'excitateur .
Préciser dans quel sens s'effectue-t-il et pourquoi ?

2°) A partir des diagrammes de la figure-2 :

a) Déterminer les expressions x(t) et F(t) . Préciser en le justifiant s'il existe des valeurs de la pulsation ω_e de la force excitatrice pour lesquelles le déphasage de x(t) par rapport à F(t) change de signe .

b) Faire la construction de Fresnel , et en déduire les valeurs de h et de k' .

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

3°) a) Donner l'expression de l'amplitude x_m en fonction de F_m, h, ω_e, k' et M. En déduire l'expression de l'amplitude v_m de la vitesse instantanée en fonction des mêmes données.

b) Déterminer le rapport $\frac{F_m}{v_m}$ en fonction de h, ω_e, k' et M. Déduire, à l'aide de l'analogie mécanique - électrique, l'expression correspondant à ce rapport en électricité et en donner la signification physique.

Rép. Num.: 1°) excitateur → résonateur ; 2°) a) $x(t)=3.10^{-2}\sin(70t-\frac{\pi}{6})$ (m) ; $F(t)=3\sin(70t)$ (N) ; b) $h=0{,}71\,kg.s^{-1}$;

$k=331{,}6\,N.m^{-1}$; 3°) a) $x_m=\frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2+(k'-M\omega_e^2)^2}}$; $F_m=\omega_e x_m=\frac{F_m}{\sqrt{h^2+(M\omega_e-\frac{k'}{\omega_e})^2}}$;

$\frac{F_m}{v_m}=\sqrt{h^2+(M\omega_e-\frac{k'}{\omega_e})^2} \leftrightarrow \frac{U_m}{I_m}=\sqrt{R^2+(L\omega_e-\frac{1}{C\omega_e})^2}=Z$ (impédance électrique).

EXERCICE 8 (Bac 2000 modifié)

Un oscillateur mécanique en régime forcé est représenté dans la figure -1- .

Il comporte un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, attaché à ressort (R) de raideur k, par l'intermédiaire d'une tige rigide (T). L'autre extrémité du ressort est fixe. Les masses de (R) et (T) sont négligeables.

Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f}=-h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de G et h une constante positive. A l'aide d'un dispositif approprié,

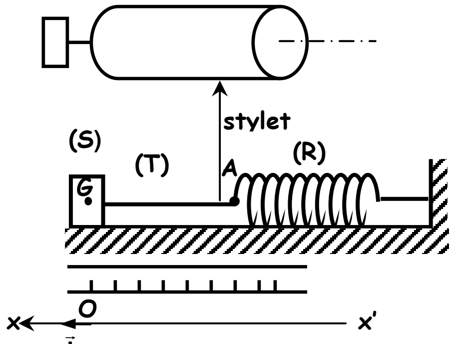


Figure -1-

on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t)=F_{max}\sin(2\pi Nt+\varphi_F)\vec{i}$. On désigne par x(t) l'élongation du centre d'inertie G en fonction du temps par rapport au repère $(O,\vec{i})$; O étant la position d'équilibre de G.

1°) Etablir que l'élongation x, sa dérivée première $\frac{dx}{dt}$ et sa dérivée seconde $\frac{d^2x}{dt^2}$ vérifient la relation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=F(t).$$

2°) Le dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) est constitué d'un cylindre enregistreur sur lequel est enroulé un papier millimétré et d'un stylet marqueur, solidaire de la tige (T), et affleurant le papier millimétré.

Dans le cas de l'expérience étudiée, ce dispositif permet d'obtenir le diagramme de la figure -2- qui correspond aux variations de l'élongation x(t).

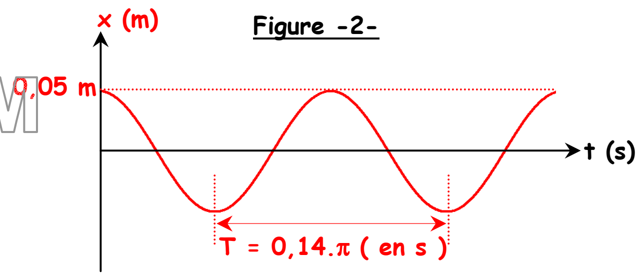


Figure -2-

a) Sachant que les deux oscillations présentées sur le diagramme de la figure -2- correspondent à un tour complet du cylindre enregistreur, en déduire le nombre de tours par minute effectués par ce cylindre.

Déterminer, à partir du diagramme de la figure -2-, x_{max}, N et φ_x.

b) Sachant que m = 98 g et k = 20 $N.m^{-1}$, montrer que (S) effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse en accord avec l'équation : $x(t)=x_{max}\sin(2\pi Nt+\varphi_x)$.

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

c) En déduire qu'à tout instant t , x(t) vérifie la relation suivante : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

d) Déterminer les valeurs de F_{max} , φ_F et la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur . On donne $h = 1{,}8\ kg.s^{-1}$.

3°) Le point de soudure A , assurant la liaison entre la tige (T) et le ressort (R) , ne peut pas supporter une tension de valeur supérieure à 1,1 N .

a) Indiquer , en le justifiant , si le risque de rupture de la soudure en A a lieu en augmentant ou en diminuant la fréquence de la force excitatrice.

b) Prouver , en faisant appel aux calculs nécessaires , qu'il peut y avoir rupture de la soudure en A .

Rép. Num. : 2°) **a)** n=68,2tours/min. ; $x_{max}=0{,}05m$; N=2,27Hz ; $\varphi_x=\dfrac{\pi}{2}$ rad ; **b)** $N=N_0 \Rightarrow$ rés. de vitesse ;

c) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=(-m\,\omega_0^2+k)x=0$; **d)** $F_{max}=h\omega\, x_{max}=1{,}29N$; $\varphi_F=\varphi_x+\dfrac{\pi}{2}=\pi rad$;

$P=\dfrac{1}{2}hv_m^2=\dfrac{F_m^2}{2h}=\dfrac{F_m v_m}{2}=\dfrac{h\omega^2 x_m^2}{2}=0{,}46watt$; **3°) a)** $\|\vec{T}_{max}\|=kx_{max}$; si N↘ , x_{max}↗ ⇒ risque de rupture ; **b)** $x_{max.rés.}=\dfrac{F_{max}}{\sqrt{(2\pi N_r h)^2+[m(2\pi N_r)^2-k]^2}}$ avec $N_r^2=N_0^2-\dfrac{h^2}{8\pi^2m^2}=0{,}89674S.I.$;

$\|\vec{T}_{max.rés.}\|=kx_{max.rés.}=1{,}31N>1{,}1N \Rightarrow$ il peut y avoir rupture de la soudure .

EXERCICE 10 (Bac 2005 modifié ancien régime)

Le dispositif de la figure - 1 - comporte :

- un ressort (R) de constante de raideur K et de masse négligeable , est disposé verticalement tel que son extrémité supérieure est attachée au fil (f) permettant de le mettre en liaison avec l'excitateur .
- un récipient transparent contenant un liquide visqueux .
- un solide (S) de masse m est accroché à l'extrémité libre du ressort . Au cours de son mouvement , il baigne totalement dans le liquide et est soumis à des frottements de type visqueux dont la résultante est $\vec{f} = - h.\vec{v}$ où h est une constante positive dont la valeur dépend de la nature du liquide visqueux utilisé et de la forme du solide et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie G de (S) .

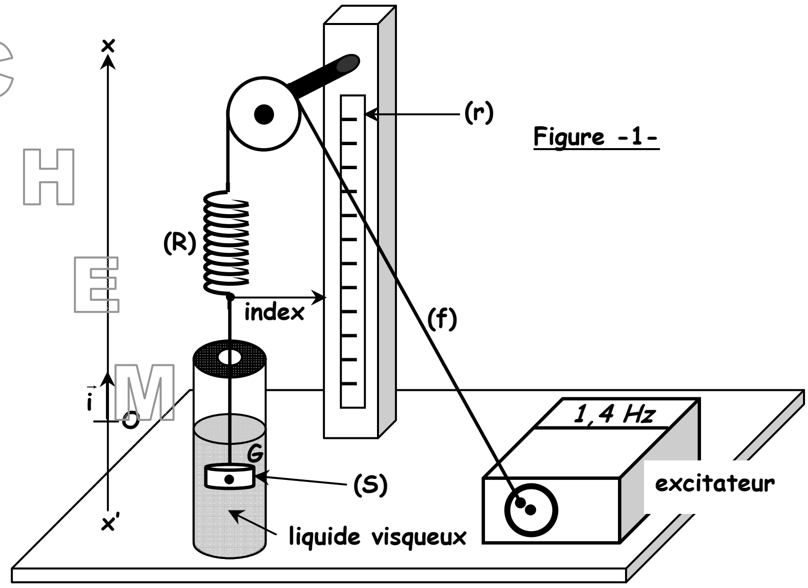


Figure -1-

L'action de l'excitateur est équivalente à une force excitatrice $\vec{F} = F_{max}\sin(2\pi N_e.t).\vec{i}$ qui s'exerce sur le solide (S) .

- une réglette (r) sur laquelle on peut repérer la position de l'index .

La position de G est définie par son abscisse x par rapport au repère $(O,\vec{i})$ d'axe x'x . L'origine O correspond à la position d'équilibre de G lorsque (S) est au repos .

Hichem.Benaich@edunet.tn
Proposée par Benaich Hichem

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

1°) Le moteur étant calé . On fait sortir le solide (S) du liquide .
On écarte (S) de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale . On mesure alors la durée Δt correspondante à 10 oscillations du solide (S) .
Sachant que Δt = 1,45 s , déterminer la fréquence propre N_0 de l'oscillateur formé par (S) .

2°) Au cours d'une séance de travaux pratiques on mesure , pour différentes valeurs de la fréquence N_e , la durée Δt correspondante à 10 oscillations du solide (S) . Ce qui permet d'obtenir le tableau de mesures suivant :

N_e (en Hz)	1,45	1,2	1
Δt (en s)	6,896	8,333	10
Fréquence des oscillations $N = \frac{10}{\Delta t}$ (en Hz)			

a) Compléter le tableau en inscrivant , pour chaque mesure , la valeur de N .

b) En comparant les valeurs de N à celles de N_e , préciser la nature , libres ou forcées , des oscillations de (S) .

3°) On fait varier la fréquence N_e de la force excitatrice , on mesure à chaque fois l'amplitude X_{max} des oscillations puis on en déduit l'amplitude V_{max} de la vitesse instantanée .
Ce qui a permis de tracer les courbes (C_1) et (C_2) de la figure - 2 - traduisant les variations de X_{max} = f (N) et V_{max} = g(N).

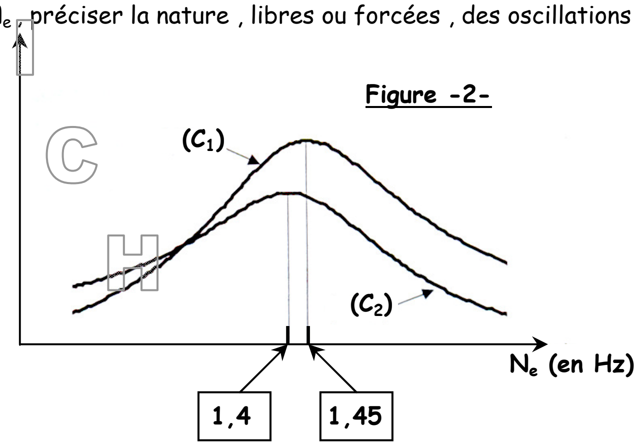


Figure -2-

a) Détermination expérimentale de X_{max}:
Lorsque N_e = 1,2 Hz l'index oscille entre les deux graduations 43 mm et 93 mm de la réglette .
En déduire la valeur de X_{max} correspondant à cette fréquence .

b) La fréquence N_r de la force excitatrice correspondante à la résonance d'amplitude (ou résonance d'élongation) vérifie la relation : $N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$.
Préciser , en le justifiant, laquelle des deux courbes (C_1) ou (C_2) correspond à X_{max} = f (N_e) .

c) Relever à partir de la figure -2 - :
- la valeur de N_0 et la comparer à celle trouvée à la question 1 - b ; déterminer alors la valeur de K sachant que m = 0,22 Kg .
- la valeur de N_r ; calculer celle de h .

4°) L'élongation instantanée $x(t) = X_{max}\sin(2\pi N_e.t + \varphi_x)$ de G est une solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t) \qquad (1)$$

Sur la figure - 3 – , à remplir par le candidat et à remettre avec la copie , est représenté le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction $h\frac{dx(t)}{dt}$ lorsque N_e = 1,2 Hz.

a) Compléter la construction de Fresnel relative à l'équation (1) en traçant sur la figure - 3 - et dans l'ordre suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ correspondant respectivement aux fonctions Kx(t) et $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

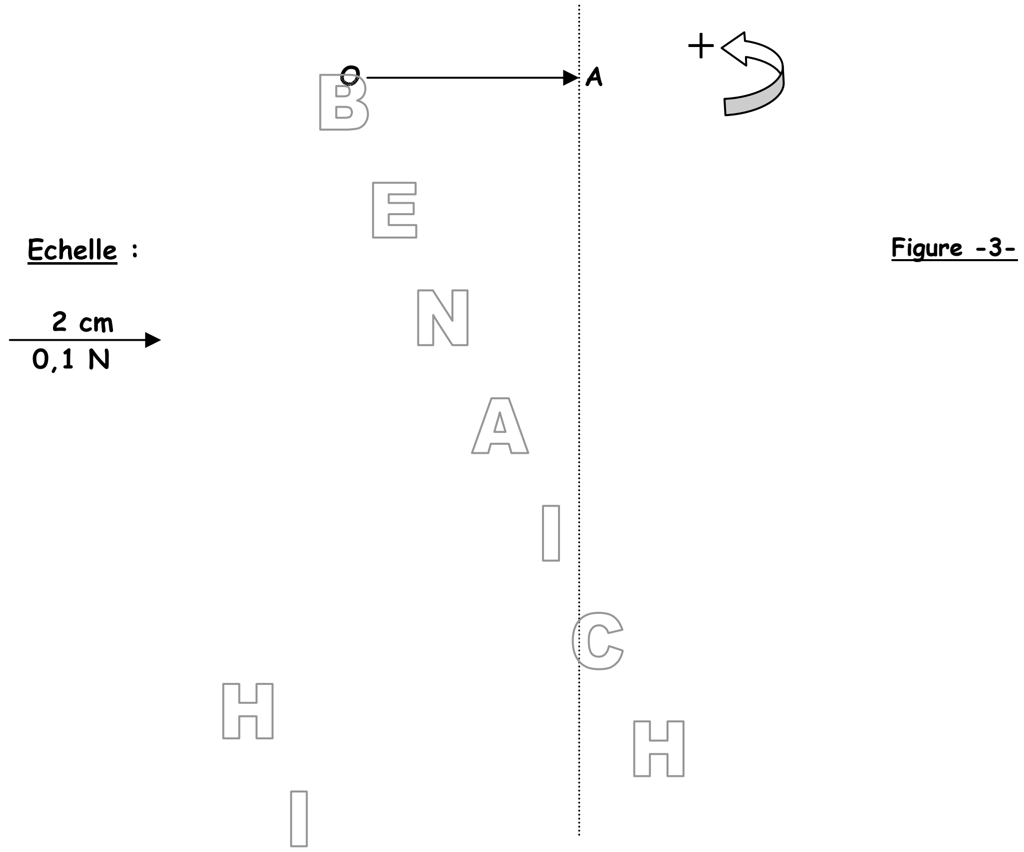


Figure -3-

b) En déduire la valeur de F_{max} et celle de la phase à l'origine φ_x exprimée en degré .

Rép. Num. : **1°) a)** $N_0 = \frac{\Delta t}{10} = 1{,}45Hz$; **2°) b)** N=Ne ⇒osc. forcées ; **3°) a)** $X_{max}=25mm$;

b) $N_r < N_0 \Rightarrow$ courbe $(C_2) \leftrightarrow X_{max}=f(N)$; **c)** $N_0=1{,}45Hz$; $K=4\pi^2 m N_0^2 = 18{,}26 N.m^{-1}$; $N_r=1{,}4Hz$;

$h=\sqrt{(N_0^2 - N_r^2).8\pi^2.m^2} \approx 0{,}74 Kg.s^{-1}$; **4°) a)** $\|\overrightarrow{AB}\| = 91mm$; $\|\overrightarrow{BC}\| = 62mm$;

b) $\|\overrightarrow{OC}\| \approx 40mm$; Fmax=0,2N ; $\varphi_x=-44°$.

EXERCICE 11 (Bac 2007 modifié ancien régime)

Un solide (S) de masse m , est attaché à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives , de raideur k et de masse négligeable devant m . la deuxième extrémité du ressort est attachée à un point fixe . L'ensemble { solide (S) , ressort } est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal .

Les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m.\sin(\omega t).\vec{i}$ où F_m la valeur maximale de F(t) . Le solide (S) se met à osciller sinusoïdalement suivant l'axe du ressort , de part et d'autre de sa position d'équilibre O dans le repère R (O , $\vec{i}$) , $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire porté par l'axe du ressort . Au cours de son mouvement , (S) se trouve soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h.\vec{v}$, où h est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide (S) ainsi que celle de la force $\vec{F}$ au cours du temps .

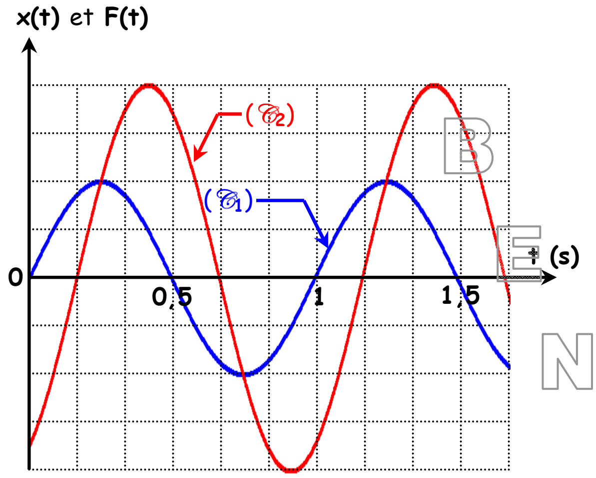
Ainsi , à tout instant , l'équation différentielle régissant les oscillations de (S) est :

$$Kx(t) + h\frac{dx(t)}{dt} + m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_m.\sin(\omega t)$$. Elle admet une solution de la forme : $x(t) = X_m.\sin(\omega t + \varphi)$.

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

La figure 1 représente les variations des valeurs de x(t) et de F(t) au cours du temps .



Echelle	
Pour x :	1 N ; $\frac{1}{6}$ s
Pour F :	0,02 m ; $\frac{1}{6}$ s

Figure -1-

1°) Montrer , en le justifiant , que la courbe ($\mathscr{C}_2$) correspond à x(t) .

2°) En exploitant la figure 1 , préciser les expression s de x(t) et de F(t) en indiquant les valeurs de X_m , φ , ω et F_m .

3°) a) Compléter la construction de Fresnel de la figure 2 « à remplir par le candidat et à remettre avec la copie » .

Echelle :
1cm représente 0,5 N

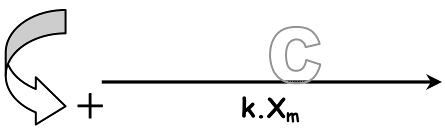


Figure -2-

b) A partir de cette construction , déduire la valeur de k et celle de h .

Rép. Num. : **1°)** x(t) est toujours en retard de phase par rapport à F(t) ; **2°)** x(t)=8.10^{-2}.sin(2πt-$\frac{\pi}{3}$) (m) ; F(t)=2.sin(2πt) (m) ;

3°) b) k.X_m=2,25N⇒k=28,125N.m^{-1} ; h.ω.X_m=1,7N⇒h=3,38kg.s^{-1} .

EXERCICE 12 (Contrôle 2008 modifié ancien régime)

Un solide (S) de masse m , est attaché à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives , de raideur k et de masse négligeable devant m . la deuxième extrémité du ressort est attachée à un point fixe .
L'ensemble { solide (S) , ressort } est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal .

En lui appliquant une fore $\vec{F}$ de même direction que l'axe du ressort et de valeur algébrique F(t) = F_m.sin($\frac{2\pi}{T}$ t) où T est la période des oscillations et F_m la valeur maximale de F(t) , le solide (S) se met à osciller sinusoïdalement suivant l'axe du ressort , de part et d'autre de sa position d'équilibre O dans le repère R (O , $\vec{i}$) , $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire porté par l'axe du ressort .

Hichem.Benaich@edunet.tn
Proposée par Benaich Hichem

SERIE DE PHYSIQUE N° 6

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

Au cours de son mouvement, (S) se trouve soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h.\vec{v}$, où h est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide (S) ainsi que celle de la force $\vec{F}$ au cours du temps. On obtient les courbes (1) et (2) de la figure suivante :

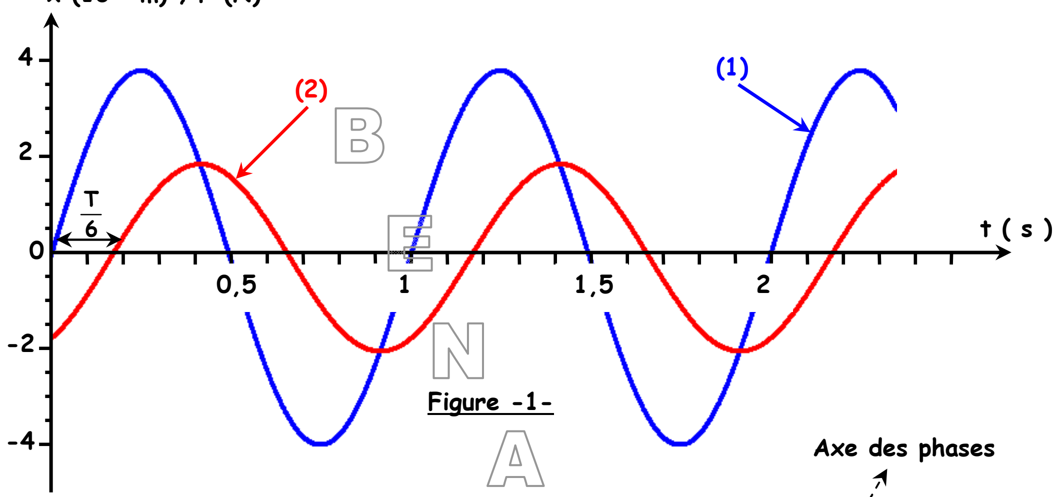


Figure -1-

1°) Montrer que c'est la courbe (1) qui représente F(t).

2°) Par exploitation des courbes (1) et (2) :

a) Déterminer F_m, l'amplitude X_m des oscillations, la période T et le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_x - \varphi_F)$, où φ_x et φ_F désignent respectivement les phases initiales de x(t) et de F(t).

b) Ecrire l'expression de l'élongation x en fonction du temps.

3°) a) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle régissant les oscillations de (S).

b) Sachant que cette équation admet comme solution particulière celle représentée par la courbe (2) :

$x(t) = X_m.\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x)$, compléter en respectant l'échelle utilisée, la construction de Fresnel de la figure 2 « à remettre avec la copie ».

c) Déterminer, à l'aide la construction de Fresnel précédente, les valeurs de h, m et k.

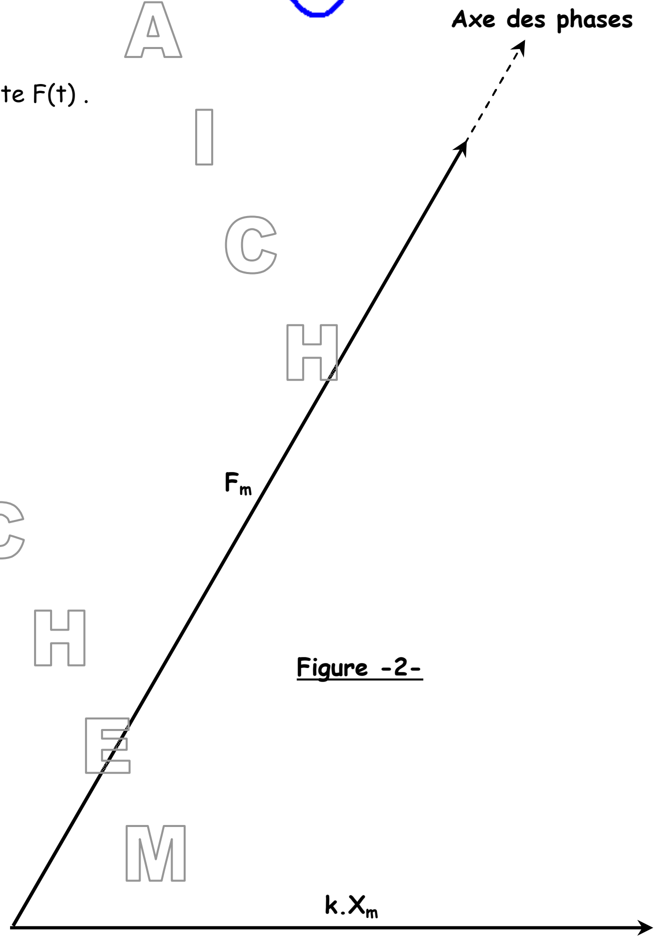


Figure -2-

Rép. Num. : **1°)** x(t) est toujours en retard de phase par rapport à F(t) ; **2°)** Fm=4N ; X_m=0,2m ; T=1s ; $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}$ rad ;

b) $x(t)=0,2.\sin(2\pi t-\frac{\pi}{3})$ (m) ; **3°) a)** $kx+h\frac{dx}{dt}+m\frac{d^2x}{dt^2}=F$; **c)** $h=2,75kg.s^{-1}$; $k=14N.m^{-1}$; $m=0,1kg$.