Q1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

$1-$ Montrer que F est une fonction impaire

existance de F :

*on a: $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow F$ est donc sa primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

$\Rightarrow F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Parité de F :

On pose $u(x)=F(x)+F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $u'(x)=F'(x)-F'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$

Donc $u(x)=c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or $u(0)=2F(0)$ et $F(0)=\int_0^0 \frac{1}{1+t^2}dt=0$ d'où $u(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)+F(-x)=0$pour tout $x \in \mathbb{R}$ ALors F est une fonction impaire.

Q2

Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\tan x)$

$1-$ Justifier que G est déivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.

$2-$ Déduire l'expression de G sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$3-$ Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

$4-$ Etudier les variations de F

$5-$ Construire ζ_F

1-

*$x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

*$x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow G$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

et $G'(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\times\frac{1}{1+\tan^2 x}=1$

2-

Comme $G'(x) = 1$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Alors pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a: $G(x) = x + c$

Or $G(0) = F(0) = 0$

Donc pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $G(x) = x$

3-

Comme: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Or $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} G(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

4-

$*D_F = \mathbb{R}$

$*\lim\limits_{+\infty} F = \frac{\pi}{2}$ et puis que F est impaire alors $\lim\limits_{-\infty} F = -\frac{\pi}{2}$

$*F$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
F'		$+$	
F	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

5-

l'origine O est un centre de symétrie

et aussi un point de la courbe ζ_F

donc c'est un point d'inflexion.

$F(0)=0$ et $F'(0)=1$ les droites $y=\dfrac{\pi}{2}$ et $y=-\dfrac{\pi}{2}$ sont des saymptotes à ζ_F