Tunisian Online Teacher
Mr. Adnen Bourkhis

Généralités sur les fonctions — 2e Sc

◦ Ensemble de définition d'une fonction :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de f noté D_f est l'ensemble des réels x tel que f(x) existe .

① $f(x) = x^2 + 3x + 1$ Pour tout réel x, on peut calculer $f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$

② $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad g(2) = \dfrac{1}{2}$ $\quad g(-8) = \dfrac{-1}{8}$ $\quad g(0) = ?$ $\dfrac{1}{0}$ "Err" n'existe pas

$\neq 0$

$x \neq 0$

$D_g = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ Condition d'existence (CE) : $x - 1 \neq 0$

$\neq 0$ $\qquad x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$i(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x-1}$ CE : $x^2 + 4x - 1 \neq 0$

$x^2 + 4x - 1 = 0$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$

$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\cancel{4}^{\,2} - \cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}} = -2 - \sqrt{5}$

$x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = -2 + \sqrt{5}$

d'où $D_i = \mathbb{R} \setminus \{-2-\sqrt{5} \,;\, -2+\sqrt{5}\}$

③ $f(x) = \sqrt{x}$ CE : $x \geq 0 \iff x \in [0, +\infty[$

$-\infty \qquad 0 \qquad +\infty$

$D_f = [0, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{3-x}$ CE : $3 - x \geq 0$ $\quad$ Si $\ \underset{\times(-1)}{-x} \geq \underset{\times(-1)}{-3}$

$3 \geq x$ $\qquad \iff x \leq 3$

3

$x \leq 3$

$]-\infty, 3]$

d'où $D_g =]-\infty, 3]$

$\underset{\times 3}{2} \leq \underset{\times 3}{4}$ $\qquad \underset{\times(-3)}{2} \leq \underset{\times(-3)}{4}$

$6 \leq 12$ $\qquad -6 \geq -12$

④ $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

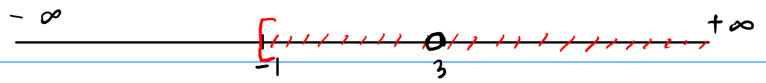
CE : il faut que $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 \neq 0 \end{cases}$

$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \iff x \in [-1,+\infty[$

$\sqrt{x+1} - 2 \neq 0 \iff \sqrt{x+1}^2 \neq 2^2$

$\iff x+1 \neq 4$

$\iff x \neq 3$



$D_f = [-1,+\infty[\setminus \{3\} = [-1,3[\cup]3,+\infty[$

- ***Courbe représentative d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur une partie E (D_f) de $\mathbb{R}$ on appelle représentation graphique de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M (x, f(x)) pour x∈ E .

$M(x, f(x))$

$M(2,4)$

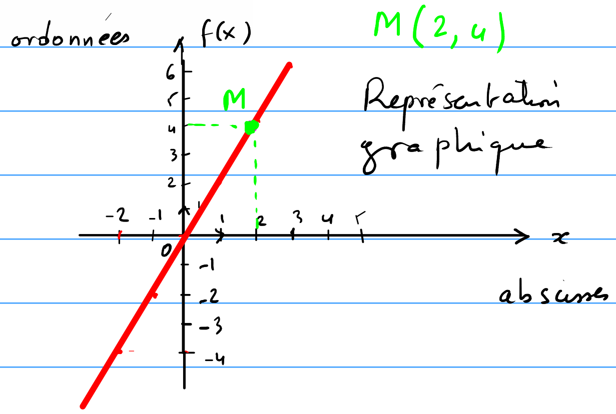
Représentation graphique

$f(x) = ax$

$a = 2$ $\quad f(x) = 2x \quad D_f = \mathbb{R}$

x	-2	-1	0	1	3
f(x)	-4	-2	0	2	6

$f(-2) = 2(-2) = -4$



- ***Maximum et minimum d'une fonction :***

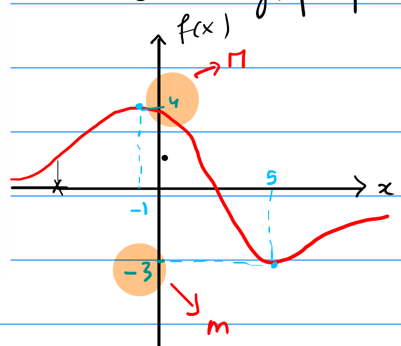
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a ∈ I :

la fonction f admet un minimum en a sur I si pour tout x ∈ I , on a f(x) ≥ f (a) le réel m = f(a) est le minimum de f sur I .

La fonction f admet un maximum en a sur I si pour tout x ∈ I , on a f(x) ≤ f(a) le réel M = f(a) est appelé le maximum de f sur I

$M=4$

lecture graphique

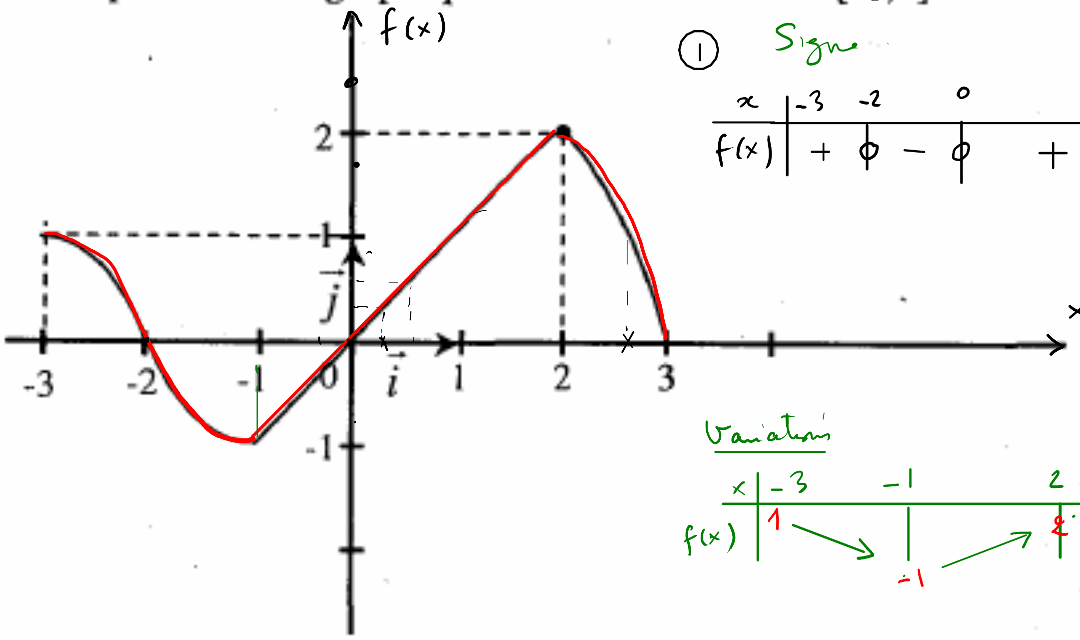


M = Maximum de f = 4 atteint en $x = -1$ $\qquad M = 4 = f(-1)$

m = minimum de f = −3 atteint en $x = 5$ $\qquad m = -3 = f(5)$

Exercice 9 :

On donne la représentation graphique de f sur l'intervalle [-3,3]



① Signe

x	-3		-2		0		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Variations

x	-3		-1		2		3
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

① Déterminer le signe de f (x) suivant les réels x de l'intervalle [-3 , 3] .

② Donner la valeur maximale de f pour [-3 , 3]

④ En déduire un encadrement de f(x) pour tout x ∈ [- 3 , 3] .

② $M = 2 = f(2)$ est la valeur maximale de f sur $[-3,3]$

car, graphiquement, $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in [-3,3]$

③ Encadrement الحصر $\quad m \leq f(x) \leq M$

Pour tout $x \in [-3,3]$ $\quad -1 \leq f(x) \leq 2$

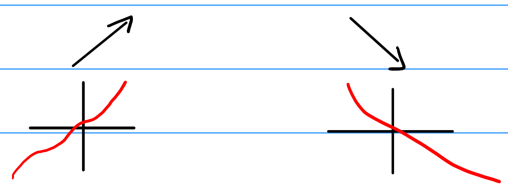
○ ***Sens de variation d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ,

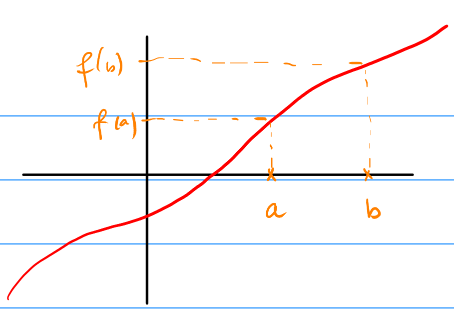
La fonction f est croissante sur I si pour tout a et b de I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$

La fonction f est décroissante sur I si pour tout a et b de I tel que $a \leq b$ on a : $f(a) \geq f(b)$.

Variation $\nearrow$ $\searrow$

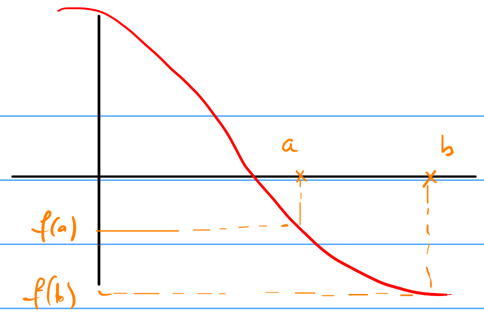


croissante décroissante



f est croissante

$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$



f est décroissante

$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

① $f(x) = x + 2 \qquad D_f = \mathbb{R}$

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ telsque $a \leq b \Rightarrow a + 2 \leq b + 2$

$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

② $f(x) = -3x - 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$

$\Rightarrow (-3)\, a \geq (-3)\, b$

$\Rightarrow -3a - 1 \geq -3b - 1 \Rightarrow -3a - 1 \geq -3b - 1$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

③ $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ CE : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$D_f = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-2, +\infty\right[$

Etudier les variations de f sur $\left]-\infty, -2\right[$:

Soient a et $b \in \left]-\infty, -2\right[$ tels que $a \leq b$

$\Rightarrow a + 2 \leq b + 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a+2} \geq \dfrac{1}{b+2}$ $\qquad 2 \leq 4$

$\qquad \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{a+2} \geq \dfrac{2}{b+2} \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

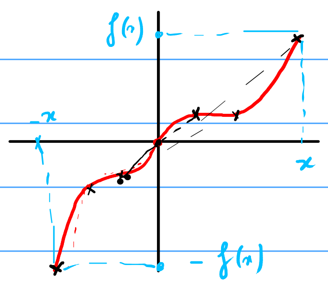
$\Rightarrow f$ est décroissante sur $\left]-\infty, -2\right[$

o *parité d'une fonction :*

Soit f une fonction définie sur D_f où D_f est le domaine de définition de f .

➪ On dit que f est paire si pour tout $x \in D_f$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$, et dans ce cas la courbe de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .

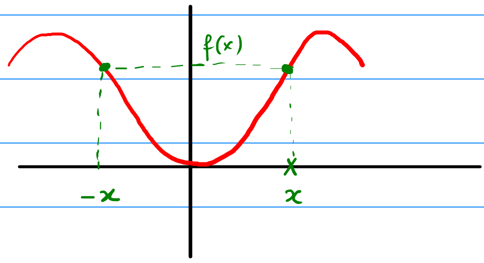
➪ On dit que f est impaire si par tout $x \in D_f$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$, et dans ce cas , la courbe de f est symétrie par rapport à l'origine O du repère .



Impaire

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point O

$$\begin{cases} x \in D_f \text{ et } -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$



Paire .

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$

$$\begin{cases} x \in D_f \text{ et } -x \in D_f . \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

bourkhisadnen@gmail.com