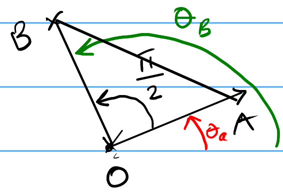
$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ $\qquad f'(x) =$

$*$ $\begin{cases} \text{Etude de fonction} \\ \text{Coordonnées polaires} \end{cases}$



$A(r_A, \theta_A)$

$B(r_B, \theta_B)$

OAB est rectangle

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) =$

$\frac{\pi}{2} [2\pi] \equiv \theta_B - \theta_A [2\pi]$.

OA et OB

$\uparrow \qquad \uparrow$

$r_A = r_B \Rightarrow$ isocèle.

OAB $\Leftarrow \frac{\pi}{2} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + 2\pi \equiv \frac{5\pi}{2} \equiv$

$\frac{}{8}$ est égale à :

3) $\cos\frac{23\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$ est égal à : a $\sin\frac{3\pi}{8}$ b $\sin\frac{\pi}{8}$

a 1 b $2\cos\frac{\pi}{12}$ c

4) $\cos(2x+\pi)+\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ est égal à: a $2\cos 2x$ b $-2\cos 2x$

8 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie où fausse:

a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}$ b) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

c) $\cos(3a)=\cos a.\cos 2a$ d) $\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

9

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c avec justification :

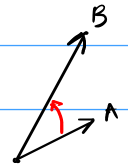
1) Dans le repère polaire $(o,\vec{i})$. A et B sont pour coordonnées polaires $(2,\frac{\pi}{6})$ et $(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3})$. une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est

a $\frac{\pi}{2}$ b $\frac{5\pi}{6}$ c $\frac{5\pi}{2}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \theta_B-\theta_A\ [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$



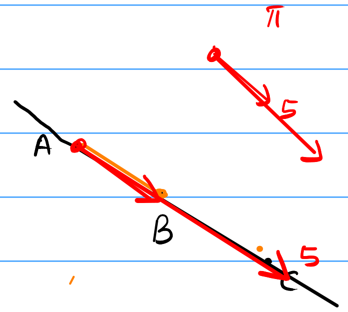
2) Dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ le point $A(-2\sqrt{3},2)$ un couple de coordonnées de A dans le repère $(o,\vec{i})$ est :

a $(2,\frac{5\pi}{6})$ b $(4,\frac{5\pi}{6})$ c $(4,-\frac{\pi}{6})$

10 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse justifier votre réponse.

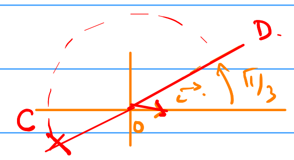
1) Les points $A(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3})$; $B(5,\frac{7\pi}{3})$; $C(2,\frac{-2\pi}{3})$ repères par leurs coordonnées polaires, sont alignées.



2) Dans le repère $(O,\overrightarrow{OI})$ les points A et B de coordonnées polaires $(5,\frac{\pi}{4})$ et $(5,\frac{7\pi}{4})$ sont symétriques par rapport à (OI).

11

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et I un point du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère polaire $(O,\overrightarrow{OI})$ placer les points A et B de

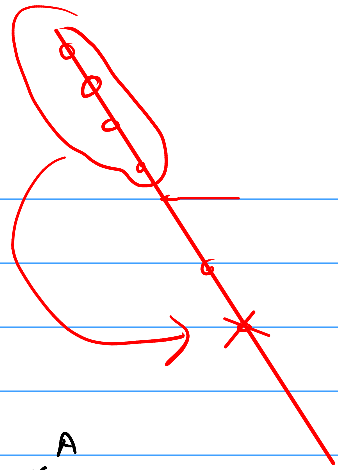


- $(\vec{i},\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow A\in D.$
- $(\vec{i},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{7\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv\frac{7\pi}{3}-2\pi\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Rightarrow B\in D$

alignement.



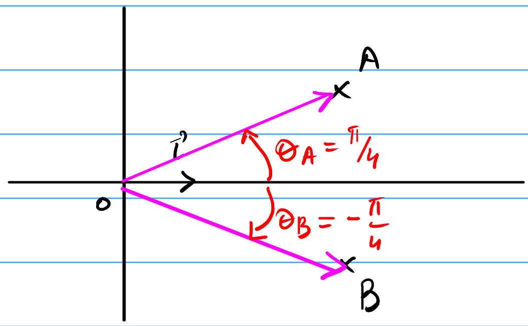
$\bullet\ (\vec{i}, \vec{OC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$

$\equiv -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\ [2\pi]$

$\equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi].$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \pi\ [2\pi].$

$\Rightarrow C \in D.$



$\begin{cases} A(r_A, \theta_A) \\ B(r_B, \theta_B). \end{cases}$

A et B sont symétriques par rapport à $(O, \vec{i})$. $\Leftrightarrow \begin{cases} r_A = r_B \\ \theta_B \equiv -\theta_A\ [2\pi]. \end{cases}$

$A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ $B\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$ $r_A = r_B$

$\theta_B \equiv \frac{7\pi}{4}\ [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{4} - 2\pi\ [2\pi] \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Rightarrow \theta_B \equiv -\theta_A\ [2\pi]$

vrai

coordonnées polaires respectives $(3,\frac{-\pi}{4})$ et $(\frac{1}{2},\frac{-2\pi}{3})$.

12 Représenter dans un repère polaire, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r,θ), Vérifient :

a) $\begin{cases} r=2 \\ \theta\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right] \end{cases}$ b) $\begin{cases} \theta=\frac{3\pi}{4} \\ r\in]0,+\infty[\end{cases}$

13 $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ un R.O.N.D.

a)Placer les points A et B de coordonnées polaires respectives $(1,\frac{-\pi}{8})$ et $(\sqrt{3},\frac{3\pi}{8})$.

b) Calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

c) Calculer la longueur AB.

d) Calculer $\cos O\hat{B}A$ et $\sin O\hat{B}A$. En déduire $O\hat{B}A$.

14 $(O,\vec{i},\vec{j})$ R.O.N.D on considère les points

$A(0,\frac{2}{3})$; $B(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-1}{3})$; $C(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3})$

a) Calculer les coordonnées polaires de ces trois points dans le repère polaire $(o,\vec{i})$.

b) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O dont on précisera la rayon.

15 $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct

1) Soit A un point de coordonnées polaires $(3,\frac{\pi}{3})$.

a) Déterminer les coordonnées polaires de B le milieu du segment [OA]

b) Déterminer les coordonnées polaires du point C tel que le triangle direct OAC soit rectangle et isocèle en C.

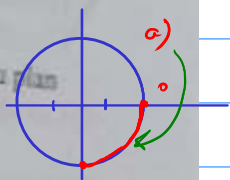
2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires (r,θ) qui vérifient : a) $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ b) $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

16 $(O,\vec{i},\vec{j})$ un R.O.N.D. Soit ζ le cercle de centre W passant par O. Soit (r,θ) les coordonnées polaires de W. Montrer que tout M du cercle ζ dont les coordonnées polaires sont (k,α). Vérifient $2r\cos(\alpha-\theta)=k$.

A

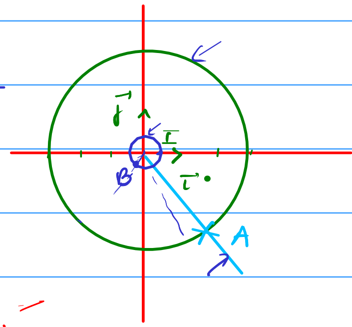
a)

$-\frac{\pi}{2}$



$3\pi/4$

b



$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\theta_B-\theta_A\ [2\pi]$

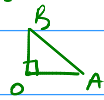
$=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

OAB est un triangle rectangle en

$AB^2=OA^2+OB^2$

$=1^2+\sqrt{3}^2$

$=4$

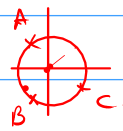


$A(\frac{2}{3};\frac{\pi}{2})$

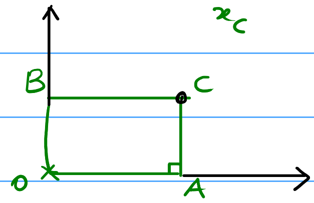
$B(\frac{2}{3};-\frac{5\pi}{6})$

$C(\frac{2}{3};-\frac{\pi}{6})$

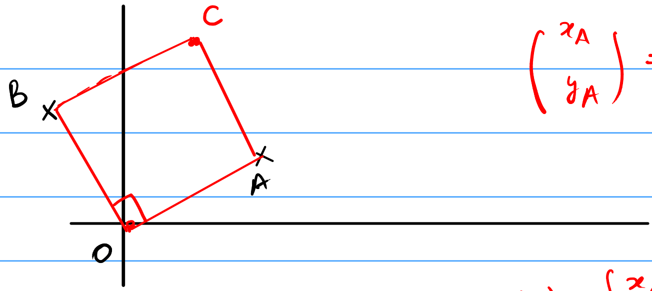
C tq



OACB



x_C



$\vec{OA} = \vec{BC}$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = x_C - x_B. \\ y_A = y_C - y_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = x_A + x_B. \\ y_C = y_A + y_B. \end{cases}$$

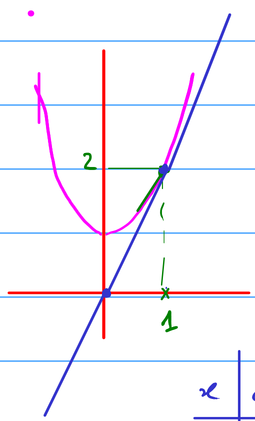
$f(x) = x^2+1 \quad ; \quad x_0 = 1 \quad ; \quad f(1) = 2$

$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow f'(1) = 2$

$T : y = 2(x-1) + 2$

$T : y = 2x$



x	0	1
y	0	2

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} \quad ; \quad x_0 = 2 \quad ; f(2) = \dfrac{1}{4}$

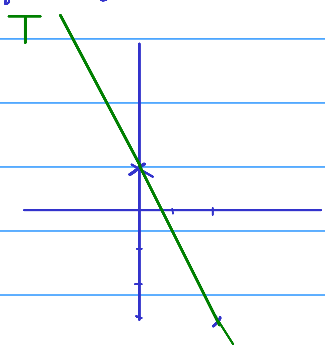
$f'(x) = \dfrac{x+2 - (x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ $\qquad f'(2) = \dfrac{3}{16}$

$T : y = \dfrac{3}{16}(x-2) + \dfrac{1}{4}$ $\qquad T : y = \dfrac{3}{16}x - \dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{8}$

$T : y = \dfrac{3}{16}x - \dfrac{1}{8}$

$T : y = -2x + 1$

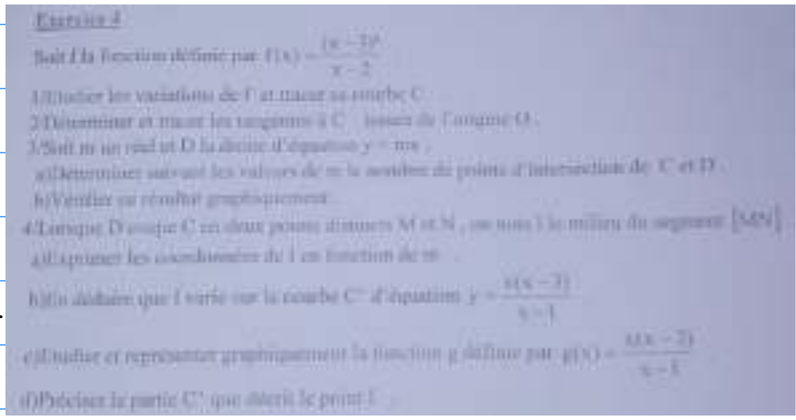
x	0	2
y	1	-3



$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2} \qquad \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(x-2) - (x-3)^2}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2-5x+6) - (x^2-6x+9)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$



Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2}$

1/Etudier les variations de f et tracer sa courbe C.

2/Déterminer et tracer les tangentes à C issues de l'origine O.

3/Soit m un réel et D la droite d'équation y = mx.

a/Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de C et D.

b/Vérifier ce résultat graphiquement.

4/Lorsque D coupe C en deux points distincts M et N, on note I le milieu du segment [MN].

a/Exprimer les coordonnées de I en fonction de m.

b/En déduire que I varie sur la courbe C'' d'équation y = [illegible]

c/Etudier et représenter graphiquement la fonction g définie par g(x) = [illegible]

d/Préciser la partie C' que décrit le point I.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	||	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

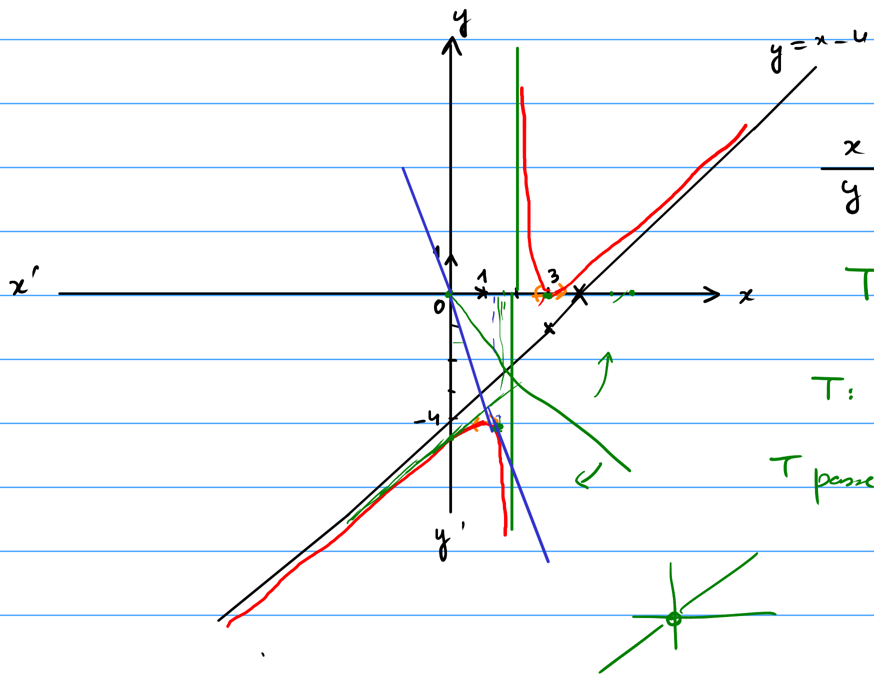
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-3)^2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)^2 - x(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - 6x + 9 - \cancel{x^2} + 2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x+9}{x-2} = -4.$$

d'où $y = x - 4$ est une A.O à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$



$y = x - 4$

x	4	3
y	0	-1

$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T: y = f'(a)x - f'(a)\times a + f(a)$

T passe par $O(0,0)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0.$

$0 = 0 - f'(a)\times a + f(a)$

$f'(a)\times a = f(a)$

$$\frac{(a-1)\cancel{(a-3)}}{(a-2)^{\cancel{2}}} \times a = \frac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{a-2}}$$

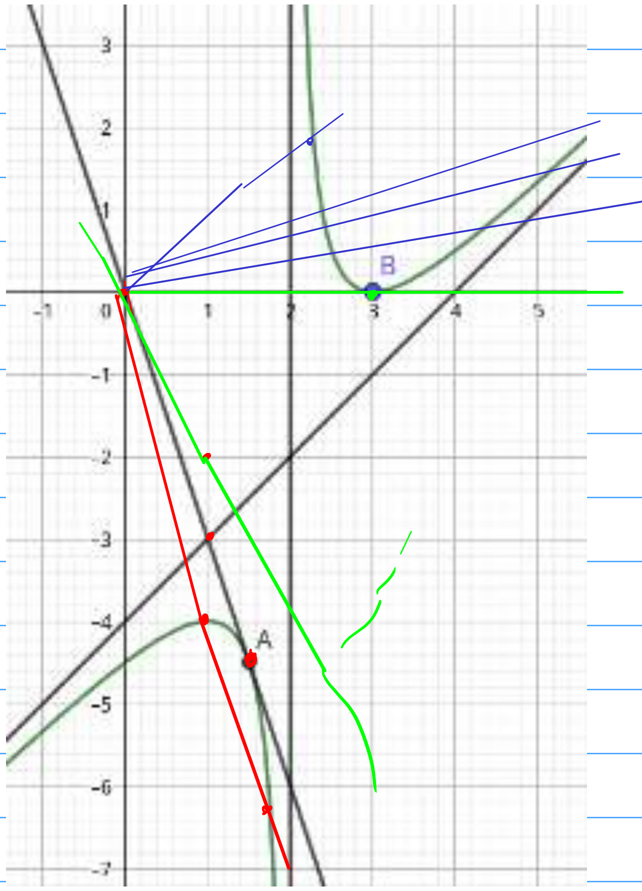
$$\frac{a-1}{a-2} \times a = a - 3$$

$a(a-1) = (a-2)(a-3)$

$\cancel{a^2} - a = \cancel{a^2} - 5a + 6$

$4a = 6$

$a = \frac{3}{2}$



$m = 0 \quad y = 0x \quad y = 0$ // $m = 1 \; y = x$

$]-3,0[\quad m = -2 \quad y = -2x$

0	1
0	−2

$]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[\rightarrow 2$

$m = -4 \quad y = -4x$

0	1
0	−4

$y = -3x$

0	1
0	−3

$D : y = mx$ (droite qui passe par O)

Intersection de $\mathcal{C}$ et D

$M(x,y) \in \mathcal{C} \cap D \iff (M \in \mathcal{C}_f$ et $M \in D)$

$\iff y = f(x)$ et $y = mx$

$\iff f(x) = mx$

$\iff \frac{(x-3)^2}{x-2} = mx$

$\iff (x-3)^2 = mx(x-2)$

$\iff x^2 - 6x + 9 = mx^2 - 2mx$

$\iff x^2(1-m) + (-6+2m)x + 9 = 0$

$\Delta_m = (-6+2m)^2 - 4(1-m)\times 9$

$= \cancel{36} + 4m^2 - 24m - \cancel{36} + 36m$

$= 4m^2 + 12m$

$= 4m(m+3)$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2}$

1)Etudier les variations de f et tracer sa courbe C.

2)Déterminer et tracer les tangentes à C issues de l'origine O.

3)Soit m un réel et D la droite d'équation y = mx.

a)Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de C et D.

b)Vérifier ce résultat graphiquement.

4)Lorsque D coupe C en deux points distincts M et N, on note I le milieu du segment [MN].

a)Exprimer les coordonnées de I en fonction de m.

b)En déduire que I varie sur la courbe C' d'équation $y = \frac{x(x-3)}{x-1}$

c)Etudier et représenter graphiquement la fonction g définie par $g(x) = \frac{x(x-3)}{x-1}$

d)Préciser la partie C' que décrit le point I.

$\Delta = 0 \qquad \Delta < 0 \qquad \Delta > 0$

m	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
m		$-$		$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	
		2 sol°	1 sol°	aucune solution	1 sol°	2 sol	

$m = -4 \quad y = -4x$

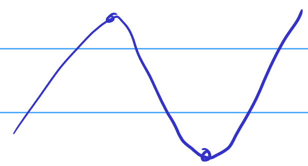
Si $m \in]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$: 2 pts d'intersect.

Si $m \in]-3,0[$: aucun pt d'intersect.

Si $m = -3$ ou $m = 0$: 1 seul pt d'intersect.

$y = mx$

$g(x) = f'(x)$ admet un extremum.



f'

Une fonction admet un extremum en a lorsque sa dérivée f'' s'annule en a en changeant de signe.

$(f')'$

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$

$f'(x) = 9x^2 - 4x \longrightarrow$ extremum ?

$f''(x) = 18x - 4$?? s'annule en changeant le signe.

	$-\infty$		$\frac{2}{9}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

f' admet un extremum en un pt d'abscisse a

$\Leftrightarrow$ f'' s'annule en changeant de signe en a.