Ministère de l'éducation

☆☆☆☆

Commissariat Régional De l'éducation Tunis 1

☆☆☆☆

EPREUVE : MATHEMATIQUES

Devoir De Synthèse N°3* Régional

4$^{\text{ème}}$ ANNÉE SECTION : Sciences Expérimentales

Durée : 3h

Date : 13 / 05 / 2022

Le sujet comporte 4 pages dont une annexe à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1 :</u> (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, il y a une seule réponse correcte. Indiquer, en justifiant, le numéro de la question ainsi que la lettre correspondante à la réponse exacte.

Soit (X, Y) une série statistique double à variables réelles.

1) Si $G_1(12\,;3.4)$ *et* $G_2(20\,;5.6)$ sont les deux points moyens partiels de la méthode de Mayer, du nuage de cette série statistique, alors la droite de régression a pour équation :

a) $y = 0.275x + 1.5$ b) $y = 0.275x + 0.1$ c) $y = 0.25x + 0.3$

2) Si la droite de moindres carrés de Y en X a pour équation : $y = 0.047x + 2.6$ et si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0.5$ alors :

a) $\sigma_X = \frac{10\sqrt{235}}{47}$ b) $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sigma_X = 0.216$

3) Si $Y = f(X)$ tel que f est une fonction strictement décroissante sur IR, alors le coefficient de corrélation linéaire r vérifie :

a) $r^2 = r$ b) $r^2 < r$ c) $r^2 > r$

<u>Exercice 2 :</u> (5 points)

1) On donne ci -dessous le tableau de variation de g la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur IR.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que f admet un unique point d'inflexion et préciser son abscisse.

b) On donne $f(0) = 1$; écrire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur IR

b) En déduire que f admet une fonction reciproque f^{-1}

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

3) On donne $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

a) Calculer : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$

a) Montrer que h est strictement croissante sur IR

b) En déduire que les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ se coupent en un unique point H d'abscisse β tel que : $-2{,}2 < \beta < -2{,}1$

5) Représenter les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}.\vec{\jmath})$ **(voir annexe)**

6) Soit $\mathcal{F}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives : $y = x$ et $y = 0$. Montrer que : $\mathcal{F} = 1 - \beta + \frac{\beta^3}{6}$

<u>Exercice 3 :</u> (4 points)

Bien que leurs origines génétiques soient différentes, l'obésité et le diabète sont deux maladies très liées ; en effet l'obésité est le premier facteur de risque du diabète dont 80% des obèses sont diabétiques, par contre seulement 15% des autres le sont aussi pour des raisons différentes. Soient D et O les évènements suivants :

D : « La personne choisie est diabétique » et O : « La personne choisie est obèse »

1) Sachant que 40% de la population étudiée est obèse

a) Dresser un arbre de probabilités représentant la situation.

b) Déterminer la probabilité d'être diabétique sachant qu'on n'est pas obèse.

2) Calculer $\mathrm{p(D)et\,p(\overline{D})}$

3) On s'intéresse aux femmes enceintes dont 30% sont diabétiques et qui auront des bébés diabétiques avec une probabilité de 0,1. Tandis que 2% des autres femmes auront des bébés diabétiques pour des raisons de complications pendant la grossesse.

On donne les deux évènements suivants :

E_d:« Une femme enceinte est diabétique » et B_d:« Une femme aura un bébé diabétique »

Calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né soit diabétique.

<u>Exercice 4 :</u> (4 points)

Dans un jeu de fléchette, la probabilité qu'un joueur atteigne sa cible est égale à p.

Un joueur effectue deux tirs. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de fois où le joueur atteint sa cible.

Soit F la fonction de répartition de X tel que $F(0) = 0.16$

1) a) Montrer que $p = 0.6$

b) En déduire la loi de probabilité de X

2) Le joueur passe à la deuxième partie du jeu dans laquelle il va tirer successivement et sans remise n boules d'une urne contenant deux boules rouges et une boule noire où n est égal au nombre de succès réalisés dans la première partie du jeu.

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y

b) Représenter la fonction de répartition de la variable Y

3) Pour terminer ; le joueur effectue un tirage au sort de m cartes parmi 5 dont deux représentent deux tickets d'une soirée où m est égal au nombre de boules rouges tirées dans la deuxième partie du jeu.

Calculer la probabilité pour que le joueur ait au moins un ticket de la soirée en quittant le jeu.

<u>Exercice 5 :</u> (4 points)

On considère g la fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et définie par : $g(x) = xe^x + 1 - x$

1)a) Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de g et déduire son signe sur $[0, +\infty[$

2) Soit α un réel strictement positif tel que $\alpha = e^\alpha + \ln \alpha$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$

par : $f(x) = \int_\alpha^x \frac{te^t+1-t}{t}\, dt$

a) Etudier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$

b) Montrer que $f(x) = e^x + \ln x - x$

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) En déduire que : $0.3 < \alpha < 0.4$

3) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x + \frac{1}{x} - 1$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par C_h la courbe représentative de h et les droites d'équations respectives : $x = \alpha\,; x = 4 \;\; et\; y = 0$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom :………………….……….. Prénom :……………………………Classe :……..…. N° :…….