Mme Sabria ABDELMALEK JEBALI
Lycée : Ennasr

Mme Sabria ABDELMALEK JEBALI Lycée : Ennasr	**Angles orientés**	**Niveau: 3 ème année maths + sciences**

Exercice n° 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer la quelle ?

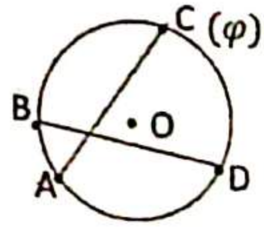
1°/ Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \frac{53\pi}{4}[2\pi]$ alors la mesure principale de l'angle orienté $(-\vec{v}, 2\vec{u})$ est :

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $-\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{3\pi}{4}$

2°/ Le plan est orienté dans le sens direct. ABC est un triangle équilatéral direct et ACD est un triangle rectangle isocèle et direct en A alors une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$ est :

a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{\pi}{3}$ **c)** $-\frac{2\pi}{3}$

3°/ On donne la figure ci – contre :



Alors $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$ est :

a) $\equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$

b) $\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$

c) $\equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$

4°/ Le plan est orienté dans le sens direct. L'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ est :

a) Le cercle de diamètre [AB] \ {A , B}

b) $\overset{\frown}{BA}$ \ {A , B} du cercle de diamètre [AB]

c) $\overset{\frown}{AB}$ \ {A , B} du cercle de diamètre [AB].

Exercice n°2

A et B sont deux points distincts.

1°/ Construire les points C, E et D définis par : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{19\pi}{6}[2\pi]$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{32\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}) \equiv -\frac{35\pi}{3}[2\pi]$

2°/ Justifier la nature du triangle ACD.

Exercice n° 3 :

ABC est un triangle inscrit dans un cercle ξ de centre O tel que AB = AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{53\pi}{3}[2\pi]$. M est le projeté orthogonal de B sur (AC). N est le projeté orthogonal de C sur (AB) et [At) est la tangente à ξ en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{At}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1°/ **a)** Les réels $(\frac{97\pi}{3})$ et $(-\frac{97\pi}{3})$ sont - ils des mesures de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

c) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ appartenant à [-5π,-3π]

2°/ **a)** Faire une figure

b) Montrer que les points M, N, B et C sont sur un même cercle ξ′ que l'on construira

c) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + \pi[2\pi]$

3°/ **a)** Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AC}}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$

b) En déduire que (OA)⊥ (MN)

Exercice n° 4

ABC est un triangle équilatéral direct. Construire le point M défini par :

$(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice n° 5

ξ est le cercle circonscrit à un triangle ABC dont H est l'orthocentre. $K = S_{(AB)}(H)$.
Montrer que K $\in \xi$.

Exercice n° 6

ABC est un triangle quelconque direct inscrit dans un cercle ξ_1 de centre O. Un cercle ξ_2 variable passant par B et C recoupe les segments de droites [AB] et [AC] respectivement en M et N. [AE) est la tangente à ξ_1 en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

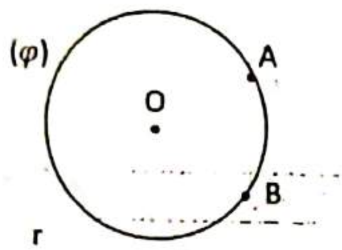
1°/ a) Faire une figure.

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}})[2\pi]$.

2°/ Montrer alors que (MN) et (AE) sont deux droites parallèles.

Exercice n° 7

On donne la figure suivante :



Construire la demi droite [At) tel que $(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Placer le point $C \in [At)$ vérifiant AC = AB.

La droite (BC) recoupe (φ) en D.

Justifier la nature du triangle ADC.

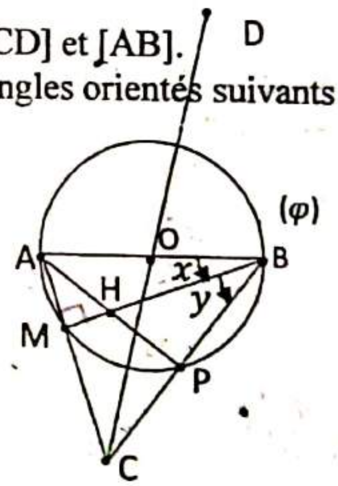
Exercice n° 8

On donne la figure suivante : O est le milieu des deux segments [CD] et [AB].

1°/ Déterminer en fonction de x et y les mesures de chacun des angles orientés suivants :

a) $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ b) $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$ d) $(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HA}})$



2°/ a) Que représente le point H pour le triangle ABC?

b) Montrer alors que les quatre points A, B, H et D appartiennent à un même cercle.

Mme Sabria ABDELMALEK JEBALI Lycée : Ennasr	Angles orientés	Niveau: 3 ème année maths + sciences

Exercice n° 1

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer la quelle ?

1°/ Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \frac{53\pi}{4}[2\pi]$ alors la mesure principale de l'angle orienté $(-\vec{v}, 2\vec{u})$ est :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$

$$(\widehat{-\vec{v}, 2\vec{u}}) \equiv (\vec{v},\vec{u}) + \pi\ [2\pi] \equiv -(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi\ [2\pi]$$

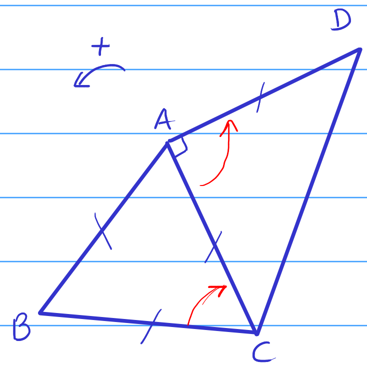
$$\equiv -\frac{53\pi}{4} + \pi\ [2\pi] \equiv \frac{-49\pi}{4}\ [2\pi] \equiv \frac{-12\times\cancel{4}-1}{\cancel{4}}\pi\ [2\pi]$$

$$\equiv -12\pi - \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

→ Réponse b)

2°/ Le plan est orienté dans le sens direct. ABC est un triangle équilatéral direct et ACD est un triangle rectangle isocèle et direct en A alors une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})$ est :

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{2\pi}{3}$



$$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\ [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{-\overrightarrow{CB},-\overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\ [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

→ Réponse a)

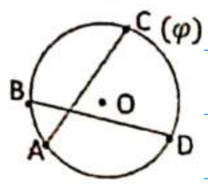
3°/ On donne la figure ci – contre :

Alors $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$ est :

a) $\equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$

b) $\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$

c) $\equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$



$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})[2\pi]$$

$$\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[2\pi]$$

$$(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$$

$$\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) \equiv 2\left((\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right)[2\pi] \equiv 2\left[(\widehat{-\overrightarrow{AD},-\overrightarrow{BD}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\right][2\pi]$$

$$\equiv 2\left((\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) + (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}})\right)[2\pi] \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$$

→ Réponse b)

4°/ Le plan est orienté dans le sens direct. L'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ est :

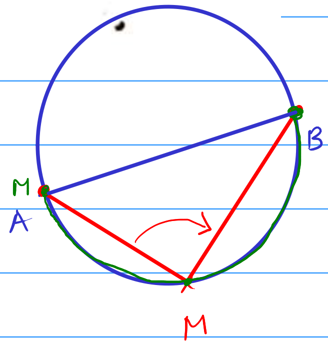
a) Le cercle de diamètre $[AB] \setminus \{A, B\}$

b) $\overset{\frown}{BA} \setminus \{A, B\}$ du cercle de diamètre $[AB]$

c) $\overset{\frown}{AB} \setminus \{A, B\}$ du cercle de diamètre $[AB]$.

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow$ Réponse c).



Exercice n°2

A et B sont deux points distincts.

1°/ Construire les points C, E et D définis par : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{19\pi}{6}[2\pi]$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{32\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}) \equiv -\frac{35\pi}{3}[2\pi]$

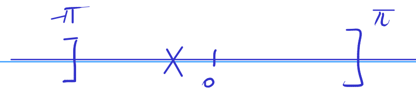
2°/ Justifier la nature du triangle ACD.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 6 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

$19 = 6 \times 3 + 1$

(1) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{19\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{-6\times3-1}{6}\pi\,[2\pi] \equiv -3\pi - \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\equiv \cancel{-3\pi-\pi} + \pi - \frac{\pi}{6}[2\pi]$



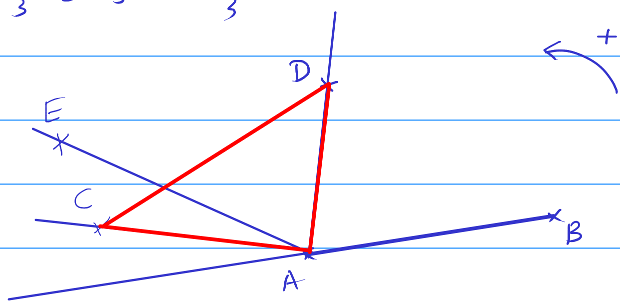
$\equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ mesure principale

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{32\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{(3\times10+2)\pi}{3}[2\pi] \equiv \cancel{10\pi} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{-35}{3}\pi\,[2\pi] \equiv \frac{-11\times3-2}{3}\pi\,[2\pi] \equiv -11\pi - \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \cancel{-11\pi-\pi} + \pi - \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$



$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}) + (\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})\,[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) + (\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})\,[2\pi]$

$\equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) + (\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}})\,[2\pi]$

$\equiv -\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{-5+2}{6}\pi\,[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où le triangle ACD est rectangle en A.

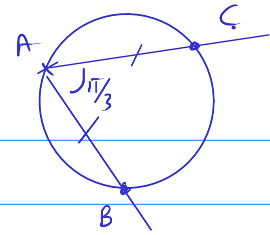
Exercice n° 3 : ABC est un triangle inscrit dans un cercle ξ de centre O tel que AB = AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{53\pi}{3}[2\pi]$. M est le projeté orthogonal de B sur (AC). N est le projeté orthogonal de C sur (AB) et [At) est la tangente à ξ en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{At}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1°/ a) Les réels $(\frac{97\pi}{3})$ et $(-\frac{97\pi}{3})$ sont - ils des mesures de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

c) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ appartenant à $[-5\pi,-3\pi]$

2°/ a) Faire une figure



① x et y sont deux mesures d'un même angle orienté

$\Leftrightarrow \quad x - y \equiv 0\,[2\pi]$

On a : $\frac{97\pi}{3} - \left(-\frac{53\pi}{3}\right) \equiv \frac{150\pi}{3}[2\pi] \equiv 50\pi\,[2\pi] \equiv 0\,[2\pi]$

$\Rightarrow \frac{97\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

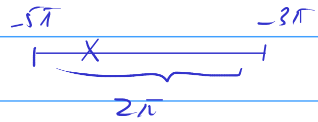
et $\quad -\frac{97\pi}{3} - \left(-\frac{53\pi}{3}\right) \equiv \frac{-97+53}{3}\pi\,[2\pi] \equiv -\frac{44\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow -\frac{97\pi}{3}$ n'est pas une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{97\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{(\cancel{3}\times 32+1)\pi}{\cancel{3}}[2\pi] \equiv \cancel{32\pi} + \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 3 \\ \hline 1 & 32 \end{array}$$

$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ mesure principale



c) Soit α la mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ qui appartient à $[-5\pi,-3\pi]$

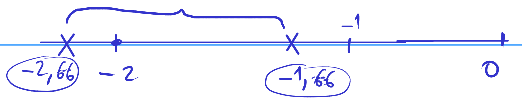
on a : $\alpha - \frac{\pi}{3} \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{3} = 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

$-5\pi \leq \alpha \leq -3\pi \Leftrightarrow -5\pi - \frac{\pi}{3} \leq \alpha - \frac{\pi}{3} \leq -3\pi - \frac{\pi}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ 20 & 3,6 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{-16\pi}{3} \leq 2k\pi \leq \frac{-10\pi}{3}\right) \times \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{-16}{6} \leq k \leq \frac{-10}{6} \Leftrightarrow -2,66 \leq k \leq -1,66 \Rightarrow k = -2$



$\Rightarrow \alpha - \frac{\pi}{3} = 2(-2)\pi$

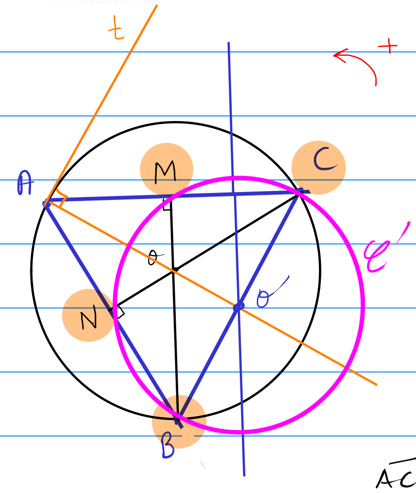
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{-11\pi}{3}$ est la mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ qui appartient à $[-5\pi,-3\pi]$

... la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$ appartenant à $[-5\pi,-3\pi]$

2°/ a) Faire une figure

b) Montrer que les points M, N, B et C sont sur un même cercle ξ' que l'on construira

c) En déduire que $(\widehat{\vec{MN},\vec{AC}}) \equiv (\widehat{\vec{BA},\vec{BC}}) + \pi[2\pi]$



② a) $AB = AC$

$(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

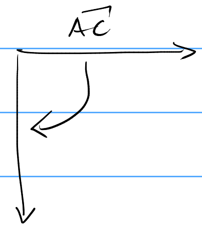
$[AO)$ est une bissectrice de $\widehat{BAC}$

b) Points cocycliques (sur le i cercle)

Soit O' le milieu de $[BC]$

On a : $(\widehat{\vec{O'C},\vec{O'M}}) + (\widehat{\vec{O'N},\vec{O'B}}) \overset{?}{\equiv} 2(\widehat{\vec{CN},\vec{MB}})[2\pi]$

$\frac{\pi}{3} \quad + \frac{\pi}{3}$



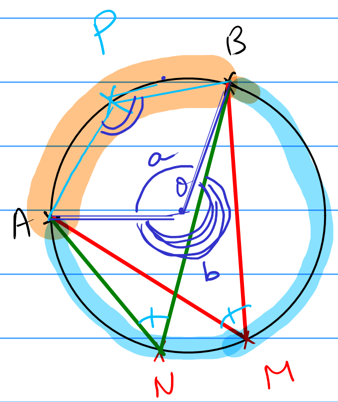
$2\times(\widehat{\vec{CN},\vec{MB}}) \equiv 2[(\widehat{\vec{CN},\vec{AB}}) + (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + (\widehat{\vec{AC},\vec{MB}})]\ [2\pi]$

$\equiv 2[\cancel{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{3} - \cancel{\frac{\pi}{2}}][2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

d'où $(\widehat{\vec{O'C},\vec{O'M}}) + (\widehat{\vec{O'N},\vec{O'B}}) \equiv 2(\widehat{\vec{CN},\vec{MB}})\ [2\pi]$

et par suite les points C, M, N et sont situés sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $O' = B*C$ et de rayon $O'B$.

c) $(\widehat{\vec{MN},\vec{AC}}) \equiv (\widehat{\vec{BA},\vec{BC}}) + \pi\ [2\pi]$



$x = \widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{BA}$)

$y = \widehat{APB}$ intercepte $\overset{\frown}{AB}$

$b = 2y$

$a + b = 2\pi$

$2x + 2y = 2\pi \Rightarrow x + y = \pi$

$y = \pi - x$

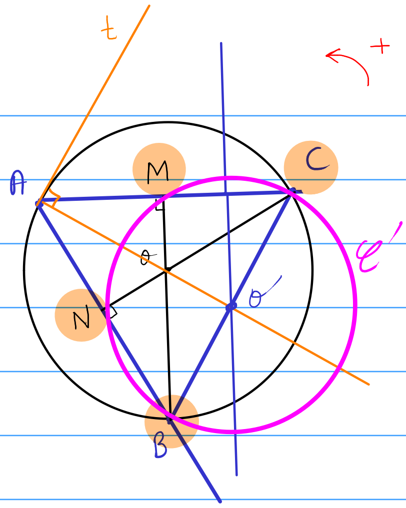
$\widehat{APB} = \pi - \widehat{AMB}$

$\widehat{APB} = \pi - \widehat{BMA}$

$a = \widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

$a = 2x$

c) $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \pi \ [2\pi]$



On a : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MN}, 2\overrightarrow{MC}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}\right) \ [2\pi]$

[$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}\right)$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc orienté $\overset{\frown}{NC}$]

$\equiv \pi - \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \pi - \left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \pi - \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \pi + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \ [2\pi]$