SERIE N° : 01

4$^{\text{ème}}$ SCIENCES EXP & TEC	2021/2022	PROF : NEFZI CHOKRI

EXERCICE N°1: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x\sqrt{x-2}}\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\ ;\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-1}\right)\ ;\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-1}\right)\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)\ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{x+3}\right)\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-\sqrt{2x^2-3}}\right)\quad \lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)\right)\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+7}}\right)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-x}{x^6-1}\right)\ ,\quad \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{(3-x)^3}+2\sqrt{x+1}\right)\ ,\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x+1}\right)\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x-1}{3x+2}\right)\right)\ ;\quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)\ ;$$

EXERCICE N°2:

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $g(x)=\dfrac{x}{3-\cos x}$.

   a- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a : $\dfrac{x}{4}\le g(x)\le\dfrac{x}{2}$

   b- En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si\quad x\le 0\\[2mm] \dfrac{\cos x-1}{\sqrt{x}} & si\quad x\succ 0\end{cases}$

   a- Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b- Montrer que : $\forall x\succ 0$, $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\le f(x)\le 0$. En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c- Déterminer le domaine de continuité de f.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}x^2-x-2 & si\quad x\in\left]-\infty;2\right]\\[2mm] \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}} & si\quad x\in\left]2;+\infty\right[\end{cases}$

   a- Montrer que f est continue en 2 . Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

   b- Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c- Calculer : $f\left(\left]-\infty;0\right]\right)$.

4) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}-x & si\quad x\ge 1\\[2mm] \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & si\quad x<1\end{cases}$

   a- Montrer que f est continue en 1.

   b- Etudier la continuité de f sur IR.

c- Montrer que pour $x \geq 1$; f(x) = $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d- Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

EXERCICE N°3:

Soit *f* la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + \sin x}{x} & si \quad x \succ 0 \\ \dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}} & si \quad x \prec 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall \quad x < 0 : f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$

2) a- Etudier la continuité de *f* à droite en 0.

b- Etudier la continuité de *f* à gauche en 0.

c- La fonction *f* est-elle continue en 0?

d- Déterminer le domaine de continuité de f

3) a- Montrer que $\forall \quad x > 0 : \; 3 - \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq 3 + \dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

EXERCICE N°4:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$

1) Etudier le sens de variation de f .
2) Déterminer les images par f de : $]-\infty ; 3]$ et $[-2 ; 0]$
3) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$.
4) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.

EXERCICE N°5:

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si \quad x \succ 0 \\ 1 + x + x^3 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

1) a- Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 - x^2 \leq g(x) \leq 1 + x^2$.

   b- En déduire : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

   c- Déterminer le domaine de continuité de g.
2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution $\alpha \in]-0,7 \; ; \; -0,6[$
3) Calculer : $\lim\limits_{x \to 2^-} g\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g\left(\dfrac{x-1}{x^2+2}\right)$.

EXERCICE N°6:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-\cos x}{x^2} & si \quad x \in]-\infty, 0[\\ 2x + \sqrt{x^2 + \dfrac{9}{4}} & si \quad x \in [0, +\infty[\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x \prec 0$, on a : $0 \leq f(x) - 1 \leq \dfrac{2}{x^2}$. En déduire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 3x\right)$. Interpréter graphiquement ces résultats.
3) Déterminer le domaine de continuité de f .
4) Montrer que l'équation : $2f(x) - 7 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 2]$.

EXERCICE N°8:

Soit g une continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	‖	↗	7

1) Donner dans chacun des cas suivants nombre de solutions de l'équation :
   g(x)=0 ; g(x)=5 et g(x)= -1

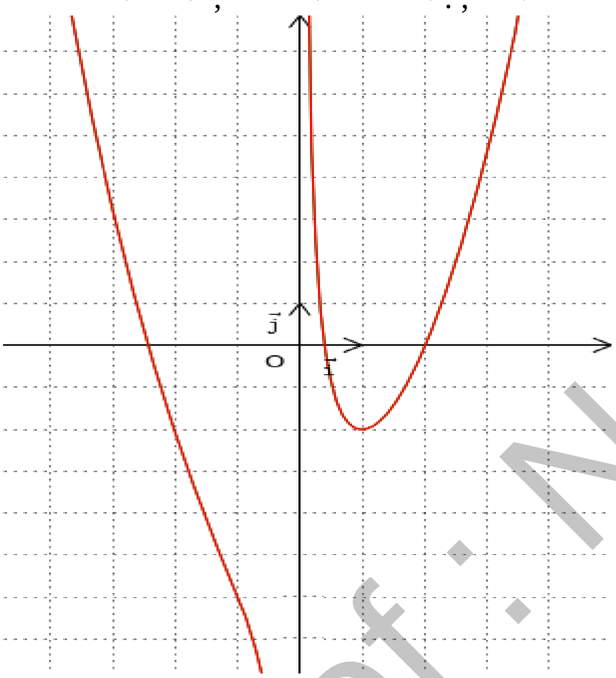
2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g\left(1-x^2\right)$

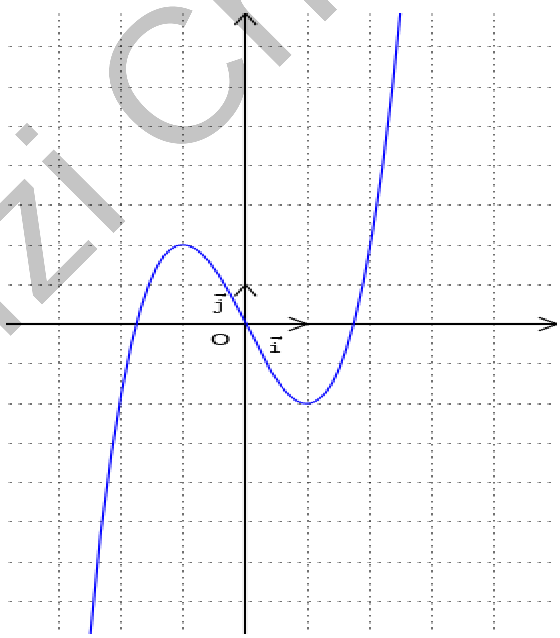
EXERCICE N°9:

Dans le plan muni d'un repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ sont tracées chacune à part les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ représentatives des fonctions f et g.

Déterminer à l'aide des graphiques et en justifiant :

$g\circ f\left([1,2]\right)$; $f\circ g\left(]-\infty,-2]\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f\circ g(x)$





EXERCICE N°10:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si \;\; x \prec 0 \\ \sqrt{\left(x^2+x+1\right)}-x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que : pour tout $x \in \left]-\infty, 0\right[$ on a : $\dfrac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1.$ En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3) Montrer que f est continue sur IR.

4) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au mois une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

b- En déduire que : $\sin\left(\pi x\right) = -\sqrt{-\alpha^2-\alpha}$