Limites et comportements asymptotiques

Série d'exercices

$3^{ème}$ Sciences Prof. M. Adnen Bourkhis

Exercice 1 :

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5-2x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1-x}$
4. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-2}{(x+1)^2}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^4-3x^3-2\right)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-1}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(4x-3)^2}$
8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{4x-12}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x-3}$
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}$
12. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{5-3x}{x+2}$
13. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2+x-2}{3-x}$
14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2-5x+4}$
15. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$
16. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x-2|}{7-2x}$
17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-5}{x^3-x^2-x+2}$
18. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2-x+1$
19. $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x-3x^2}{x-5}$
20. $\lim\limits_{x \to 3^-} \left|\dfrac{2-3x}{x-3}\right|$
21. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3-x^2+3x-1$
22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x-2}{x^2+x-3}$
23. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-5}{4-3x}$
24. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5x-2}{x^2+x-3}$
25. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x-2}{x^2+x-3}$
26. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2-1}}$
27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x-4}}{x-1}$
28. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x-4}}{x-1}$

Exercice 2 :

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$
2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{2+x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5-x}{2x^2-12x+10}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x+7}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2+8x+5}{2x^2+11x+3}$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3-x^2-2}{5x^2-8x+3}$
11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2+2x-8}$
12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$
14. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{3-\sqrt{x+5}}$
15. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x+7}{\sqrt{16-x}-3}$
16. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{2x+4}-4}{6-x}$
17. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{3x+4}-4}$
18. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}$
19. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{5-x}}{x^2-7x+12}$
20. $\lim\limits_{x \to 2} E(4-x)$
21. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-x$
22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-5x}-2x$
23. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x-\sqrt{3x^2+x+9}$

(24) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{x^2 + x}$ (25) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} E(3x - 1)$ (26) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x - 3 + \sqrt{3x^2 - x + 2}}$

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 + 3x + \dfrac{5}{2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

(1) Montrer que f est continue en -1.
(2) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(-\infty)$.
(3) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ pour $x \leqslant -1$.

Exercice 4 :

Soit l afonction $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$.

(1) Quel est l'ensemble de définition $\mathfrak{D}$ de g?
(2) Etudier le comportement de g sur son domaine définition $\mathfrak{D}$ (limites et asymptotes éventuelles).

Exercice 5 :

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(1) Déterminer les réels a, b et c tels ue $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
(2) Calculer $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ et en déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale à préciser.
(3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2x^2 - a}{x^2 - 1} & \text{si } x \geqslant 0 \qquad (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$

(1) Déterminer le domaine de définition de f.
(2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
(3) Déteminer le réel a pour que f soit continue en 0.
(4) a) Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) = -\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{x^2}} - \dfrac{1}{x}$ et déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
b) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.