Série : Équation Différentielle : N°2

Gary Badreddine
Lycée El Montazeh El Mourouj 2 : 2019-2020

Exercice 1

On considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} (E) : y'' + 4y = 3\cos(x) \\ (E_0) : y'' + 4y = 0\,. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :$g(x) = \cos(x)$ est une solution de (E).
2. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).
3. a) Résoudre l'équation : (E_0) .
   b) En déduire les solutions de (E).
   c) Déterminer la solution de(E) dont la courbe C dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$passe par O et admette en O une tangente parallèle à $\left(O, \ \vec{\imath}\right)$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $(E) y'' + 4y = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. La plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui satisfait aux conditions ci-dessous :

✓ La courbe représentative de f passe par le point $A(\frac{\pi}{2}, -1)$.

✓ La tangente à cette courbe en A est parallèle à la droite $D : y = 2x$.

3. Montrer que : $f(x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.
4. Soit S le solide de révolution obtenue en faisant tourner l'arc $[MN]$ de la courbe de f autour de l'axe des abscisses dont les extrémités M et N ont pour coordonnées $M(0, 1)$ et$N(\frac{\pi}{8}, 0)$.
   Calculer le volume de S.

Exercice 3

On considère pour tout $x \in [0,2[$, l'équation différentielle $(E) : y' + y = \frac{e^{-x}}{(2-x)^2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

2.

✓ Soit f une fonction dérivable sur $[0,2[$ tel que $f(1) = e^{-1}$.

✓ Soit g la fonction définie sur $[0,2[$ par :$f(x) = e^{-x}g(x)$.

- a) Calculer $g(1)$.
- b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in [0,2[: g'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$.
- c) Déterminer alors l'expression de $g(x)$ et en déduire que pour tout $x \in [0,2[: f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$.

3. a) Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $(h - f)$ est solution de (E').

   b) En déduire les solutions de l'équation (E) .

Exercice 4

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue .
On note $V(t)$ sa vitesse à l'instant t où t est exprimé en secondes et $V(t)$ en mètres par seconde.La fonction V suit la loi :$10y' + y = 30$.

1. En supposant que lorsque le cycliste s'élance sa vitesse initiale est nulle montrer que $V(t) = 30(1 - e^{-0,1t})$.

2. a) Montrer que le mouvement est accéléré .

   b) Déterminer la limite de V en $+\infty$ .Interpréter .

3. On suppose dans cette situation que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $V'(t)$ est inférieure à $0,1ms^{-2}$.
Déterminer à la seconde prés la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée .