Exercice :n°5

Un solide (S) de centre d'inertie G, de masse m et pouvant glisser sur un plan horizontal, est lié à l'extrémité d'un ressort horizontal (R) de masse négligeable, de raideur k = 40 $N.m^{-1}$ et dont l'autre extrémité est fixe. Lorsque (S) est dans sa position d'équilibre, G occupe l'origine du repère $(O, \vec{i})$ d'axe Ox horizontal (figure-3-). Un excitateur approprié exerce sur le solide (S) une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t)\vec{i}$ où l'amplitude F_m est constante et la pulsation ω est réglable. Ce solide est introduit dans un liquide amortisseur où il subit une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ avec h un coefficient positif et $\vec{v}$ est la vitesse de G. En régime permanent, l'équation horaire du mouvement de G est de type $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

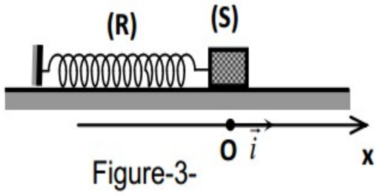


Figure-3-

1) Pour un circuit RLC série alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, l'amplitude Q_m de la charge q du condensateur est donné par : $Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2}}$

Montrer que l'amplitude Q_m est maximale pour une valeur $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}}$ de la pulsation ω.

2) Par analogie électrique-mécanique, donner les expressions de:

a- l'amplitude X_m des oscillations du centre d'inertie G du solide (S) ;

b- la pulsation ω_r pour laquelle l'amplitude X_m est maximale.

3) On mesure l'amplitude X_m pour différentes valeurs de la pulsation ω de la force excitatrice, ce qui a permis de tracer la courbe $X_m = f(\omega)$ et d'en déduire la courbe $V_m = g(\omega)$ qui traduit les variations de l'amplitude V_m de la vitesse instantanée v(t) du centre d'inertie G du solide (S). On obtient les courbes (a) et (b) de la figure-4- de la feuille annexe (page-5/5-).

a- Montrer que la courbe (a) correspond à l'évolution de $X_m = f(\omega)$.

b- Expliquer comment peut-on obtenir la courbe (b) à partir des mesures qui ont permis de tracer la courbe (a).

4) Déterminer graphiquement :

a- La valeur de la pulsation propre ω_0 du système {solide, ressort}. En déduire la valeur de la masse m du solide.

b- la valeur de la pulsation ω_r ;

c- l'amplitude X_{mr} à la résonnance d'élongation ;

d- l'amplitude V_{mr} à la résonnance de vitesse.

5) a- Montrer que la valeur maximale de la force excitatrice est F_m = 4N.

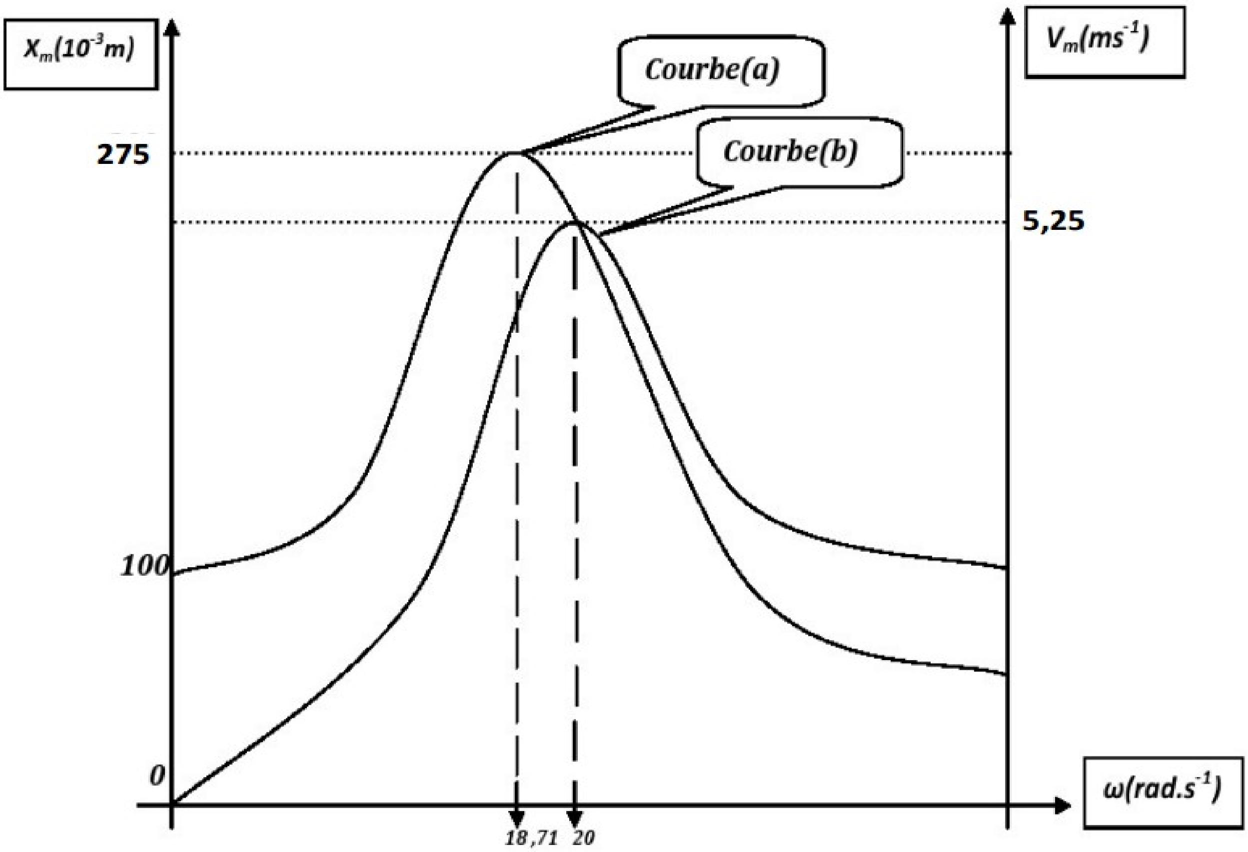
b- Par analogie électrique- mécanique, exprimer à la résonnance de vitesse, l'amplitude F_m en fonction de h et V_{mr}.

c- En déduire la valeur du coefficient de frottement visqueux h.

6) a- Calculer, à la résonnance de vitesse, le coefficient $Q = \dfrac{KX_m}{F_m}$.

b- Dire, en le justifiant, quel risque peut courir le système {solide, ressort}, si ce coefficient prend une valeur assez grande.

c- Donner par analogie électrique-mécanique, l'expression de ce coefficient dans le cas du circuit RLC série alimenté par la tension u(t). Que représente ce coefficient ?



Corrigé

I- 1) Q_m est maximale lorsque $g(\omega) = R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2$ est minimale d'où pour

$\omega = \omega_1$, $g'(\omega) = \frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0$ soit $2R^2\omega_1 + 2.\,2L\omega_1\,(L\omega_1^2 - 1/C) = 0$;

$2\omega_1\,(R^2 + 2.L\,(L\omega_1^2 - 1/C)) = 0$ ce qui donne $\omega_1^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}$;

Soit $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

2) a- $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - K)^2}}$;

b- $\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2}}$

3) a- Pour $\omega = 0$, $X_m \neq 0$ et la courbe (a) atteint son maximum pour une pulsation $\omega_r <$ à celle de la courbe (b) d'où la courbe (a) correspond à $X_m = f(\omega)$.

b- Comme $V_m = \omega X_m$ alors en multipliant les valeurs de X_m par ω on obtient les mesures permettant de tracer la courbe (b).

4) a- à la résonance de vitesse $\omega_0 = \omega_r(v)$ = **20 rad.s^{-1}**.

$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$; d'où $m = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{40}{400}$ = **0,1 kg**.

b- ω_r = **18,71 rad.s^{-1}.**

c- X_{mr} = **0,275 m**.

d- V_{mr} = **5,25 m.s^{-1}**.

5) a- Pour $\omega = 0$, $X_m = \frac{F_m}{K}$ d'où $F_m = K.X_m = 40\ .0{,}1$ = **4N**.

b- à la résonance d'intensité $U_m = RI_{mr}$,
à la résonance de vitesse $\mathbf{F_m = h.V_{mr}}$.

c- $h = \dfrac{F_m}{V_m}$ d'où $h = \dfrac{4}{5,25}$ = **0,76 N.m^{-1}s**.

6)a- à la résonance de vitesse $X_m = \dfrac{V_{mr}}{\omega_0}$ = 5,25/ 20=0,26m d'où $Q = \dfrac{40.0,26}{4}$ = **2,6**.

b- Lorsque ce coefficient devient important la tension maximale du ressort KX_m devient très supérieure à F_m ce qui risque de détacher le solide du ressort.

c- Par analogie $Q = \dfrac{\frac{1}{C}.Q_m}{U_m} = \dfrac{U_{cm}}{U_m}$ c'est le coefficient de surtension.

Bon travail